EDWALDO BIANCHINI

Matemática

9º ANO

Código da coleção
24799COL02

Material de divulgação da
Editora Moderna

MANUAL DO
PROFESSOR

Componente curricular: MATEMÁTICA

Moderna

Sumário

CAPÍTULO 1 Potências e raízes

CAPÍTULO 2 Proporcionalidade e semelhança em Geometria

CAPÍTULO 4 Equações do 2º grau

CAPÍTULO 5 Triângulos retângulos

CAPÍTULO 6 Razões trigonométricas nos triângulos retângulos

CAPÍTULO 7 Estudo das funções

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 8 Circunferência, arcos e relações métricas

CAPÍTULO 9 Polígonos regulares e áreas

CAPÍTULO

1 Potências e raízes

1. Potências

Conta-se que o jogo de xadrez foi inventado há 1.550 anos por um indiano chamado Sessa.

EDUARDO SANTALIESTRA/CID

Ao conhecer o jogo, o rei da Índia ficou tão entusiasmado que ofereceu a Sessa a liberdade de escolher o que ele bem desejasse como recompensa por tão notável invento. Toda a corte esperava que Sessa fosse pedir grandes riquezas, mas ele surpreendeu a todos com o seguinte pedido:

1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro
2 grãos de trigo pela segunda casa
4 grãos de trigo pela terceira casa
8 grãos de trigo pela quarta casa
16 grãos de trigo pela quinta casa
32 grãos de trigo pela sexta casa

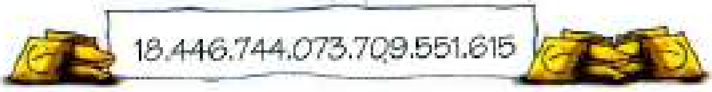
VICENTE MENDONÇA

e assim por diante, sempre dobrando o número de grãos da casa anterior até a casa de número 64 (o tabuleiro de xadrez tem 64 casas).

Seu pedido provocou risos. Um invento tão brilhante e um pedido tão simples. O rei e toda a corte ficaram decepcionados. Você também não ficaria?

Mas palavra de rei é palavra de rei, e ele pediu a seus criados que entregassem a Sessa um punhado de grãos de trigo. Sessa recusou a oferta, dizendo que queria receber exatamente o que havia pedido. Nem um grão a mais, nem um grão a menos.

O rei pediu então que seus calculistas fizessem as contas. Depois de muitas horas de trabalho, eles encontraram o número:



VICENTE MENDONÇA

ou seja, dezoito quintilhões, quatrocentos e quarenta e seis quatrilhões, setecentos e quarenta e quatro trilhões, setenta e três bilhões, setecentos e nove milhões, quinhentos e cinquenta e um mil, seiscentos e quinze.

É um número tão grande que seriam necessários muitos séculos para se produzir tamanha quantidade de trigo!

Como o rei iria cumprir sua promessa?

Que situação difícil a daquele rei. Mas, também, como ele poderia imaginar que daquele pedido tão simples resultasse tamanha quantidade de trigo?

Sessa, entendendo a aflição do monarca por não poder cumprir sua promessa, perdoou a dívida. Afinal, seu objetivo havia sido atingido, ou seja, chamar a atenção do monarca para o cuidado que deveria ter com suas promessas e seus julgamentos.

O final não poderia ser mais feliz: Sessa foi nomeado conselheiro do rei.

Acabamos de ver um interessante exemplo de aplicação de potenciação, pois a quantidade de grãos de trigo de cada casa do tabuleiro pode ser expressa por uma potência, assim:

1ª casa .... 2^0

2ª casa .... 2^1

3ª casa .... 2^2

⋮

64ª casa .... 2^{63}

Agora, vamos recordar o que sabemos a respeito de potências.

Revendo conhecimentos sobre potências

Você deve se lembrar do significado de 3^2 e de 3^3:

- $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
- $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

De modo geral, sendo a um número real, temos:

- $a^2 = a \cdot a$
- $a^3 = a \cdot a \cdot a$

Podemos considerar um expoente genérico n, em que n é um número inteiro. Daí se define a^n assim:

- Se $n > 1$, então: $$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Por exemplo: $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 = \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{49}$

• Se $n = 1$, então: $a^1 = a$

Por exemplo: $\left(-\frac{2}{7}\right)^1 = -\frac{2}{7}$

• Se $n = 0$ e $a \neq 0$, então: $a^0 = 1$

Por exemplo: $\left(-\frac{2}{7}\right)^0 = 1$

• Se $n = -1$ e $a \neq 0$, então: $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Isso significa que a^{-1} é o inverso de a, pois $\frac{1}{a}$ é o inverso de a.
Assim, se a^{-1} é o inverso de a, também a é o inverso de a^{-1}.
Veja alguns exemplos:

a) $3^{-1} = \frac{1}{3}$ (é o inverso de 3)

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$ $\left(\text{é o inverso de } \frac{2}{5}\right)$

c) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{-\frac{2}{7}} = -\frac{7}{2}$ $\left(\text{é o inverso de } -\frac{2}{7}\right)$


VICENTE MENDONÇA

De modo geral, se $n > 1$ e $a \neq 0$, temos: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Por exemplo: $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$

A potenciação tem algumas propriedades importantes que facilitam cálculos e simplificam expressões. Vamos revê-las.

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$ (com $a \neq 0$)
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ e $(a : b)^m = a^m : b^m$ (com $b \neq 0$)

OBSERVAÇÃO

Note que a definição dada acima de que, para $a \neq 0$, $a^0 = 1$ é compatível com a propriedade:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \text{ (se } a \neq 0\text{)}$$

De fato, por exemplo, $a^2 : a^2 = \frac{a \cdot a}{a \cdot a} = 1$ e $a^{2-2} = a^0$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Como exemplo da aplicação das propriedades da potenciação, vamos calcular o valor das expressões:

a) $\underbrace{(7^4 \cdot 7^2)}^3 : 7^{15} = \overbrace{(7^6)^3} : 7^{15} = \underbrace{7^{18} : 7^{15}} = 7^3 = 343$

b) $\dfrac{a^{5x-2} \cdot a^{2-x}}{(a^x)^{-2}}$ $(a \neq 0)$

Temos: $\dfrac{a^{5x-2} \cdot a^{2-x}}{a^{-2x}} = \dfrac{a^{5x-2+2-x}}{a^{-2x}} = \dfrac{a^{4x}}{a^{-2x}} = a^{4x-(-2x)} = a^{6x}$

Há mais de uma forma de fazer o cálculo do primeiro exemplo, $(7^4 \cdot 7^2)^3 : 7^{15}$. Veja algumas delas.

Essa forma, apesar de ser mais trabalhosa, é esclarecedora para alguns alunos que fazem de maneira errada $7^3 = 7 \cdot 3 = 21$, em vez de $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$.

1ª forma

$7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

$7^2 = 7 \cdot 7$

$7^4 \cdot 7^2 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

$(7^4 \cdot 7^2)^3 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7)^3 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7)$

$$\frac{(7^4 \cdot 7^2)^3}{7^{15}} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$

2ª forma

$7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2.401$

$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$

$7^4 \cdot 7^2 = 2.401 \cdot 49 = 117.649$

$(7^4 \cdot 7^2)^3 = (117.649)^3 = 117.649 \cdot 117.649 \cdot 117.649 = 1.628.413.597.910.449$

$7^{15} = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 4.747.561.509.943$

$$\frac{(7^4 \cdot 7^2)^3}{7^{15}} = \frac{1.628.413.597.910.449}{4.747.561.509.943} = 343$$

É fácil notar que, mesmo havendo várias formas de calcular a expressão acima, a mais simples é aquela em que usamos as propriedades da potenciação.

OBSERVAÇÃO

É importante notar que, em geral, $(a^3)^2 \neq a^{3^2}$. Veja por quê:

- $(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^6$
- $a^{3^2} = a^{(3^2)} = a^9$

Em $(a^3)^2$, o que está sendo elevado ao quadrado é a^3.

Em a^{3^2}, o que está sendo elevado ao quadrado é o expoente 3.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Um condomínio possui 6 prédios. Cada prédio tem 6 andares, e cada andar, 6 apartamentos. Em seu caderno, expresse na forma de potência o número de apartamentos desse condomínio. 6^3

VICENTE MENDONÇA

2 Verifique quais das expressões abaixo são verdadeiras e quais são falsas. Justifique em seu caderno.

a) $(4^5)^2 = 4^{5^2}$ F

b) $(4^5)^2 = (4^2)^5$ V

c) $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$ V

d) $(2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2$ F

3 Em seu caderno, simplifique as expressões obtendo uma única potência.

a) $(2^4 \cdot 2^6) : (2^5 \cdot 2^3)$ 2^2

b) $(x^4 \cdot x^2 \cdot x^3)^2 : (x^4)^5$, com $x \neq 0$ x^{-2}

c) $\dfrac{2^{5x-1} \cdot 2^{x+2}}{2^{3x-2}}$ 2^{3x+3}

d) $(5^2 \cdot 5^3) : (5^1 \cdot 5^0)$ 5^4

4 Calcule, em seu caderno, o valor das expressões.

a) $(-2)^2 + (-2)^3$ -4

b) $(-3)^0 - (-3)^3$ 28

c) $3^{-1} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}$ 1

d) $8^{-1} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ $\dfrac{1}{18}$

e) $2^{-1} + 2^0$ $\dfrac{3}{2}$

f) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ $-\dfrac{65}{36}$

g) $\dfrac{5^0 + 5^{-1}}{5^{-2}}$ 30

h) $(0{,}25)^2 - (0{,}5)^3$ $\dfrac{-1}{16}$

Como escrever um número como potência de uma base dada

Conhecendo o significado de uma potência e as propriedades de potências de mesma base, vamos ver como, em certos casos, podemos escrever um número na forma de potência de uma base dada.

Vamos, por exemplo, escrever:

a) 32 como potência de base 2.

Decompondo 32 em fatores primos, obtemos $32 = 2^5$.

b) $\dfrac{1}{8}$ como potência de base $\dfrac{1}{2}$.

$$\frac{1}{8} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Portanto: $\dfrac{1}{8} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

c) $\dfrac{1}{8}$ como potência de base 2.

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-1} = 2^{-3}$$

Portanto: $\dfrac{1}{8} = 2^{-3}$

VICENTE MENDONÇA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

d) $\frac{8}{27}$ como potência de base $\frac{3}{2}$.

$$\frac{8}{27}=\frac{2^3}{3^3}=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

Portanto: $\frac{8}{27}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5 Escreva, em seu caderno, os seguintes números como potência de base 2:

a) 256 2^8
b) 1.024 2^{10}
c) $\frac{1}{64}$ 2^{-6}
d) $\frac{1}{128}$ 2^{-7}

6 Em seu caderno, escreva os seguintes números como potência de base 3:

a) 9 3^2
b) 81 3^4
c) $\frac{1}{27}$ 3^{-3}
d) $\frac{1}{243}$ 3^{-5}

7 Sendo $A = 3x^2 + 5x - 6$, determine, em caderno, o valor de A para:

a) $x = -2$ -4
b) $x = 2^{-1}$ $-\frac{11}{4}$

8 Em seu caderno, determine o valor da expressão $\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{27}x^2+\frac{1}{3}x-1$ para $x=\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$. 80

9 Simplifique, em seu caderno, as expressões obtendo uma única potência.

a) $\frac{4^2\cdot 8^3}{2^{10}}$ 2^3
b) $\frac{9^3\cdot 27^2}{81}$ 3^8

10 Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

a) Em seu caderno, reproduzam a tabela abaixo e completem-na atribuindo a n os números inteiros de 1 a 5. construção da tabela

Expoente inteiro positivo (n)	Indicação de 10^n	Potência (resultado)	Número de zeros da potência

b) Comparando a primeira e a última colunas da tabela do item **a**, escrevam uma regra para obter, sem fazer cálculos, a potência indicada por 10^n. Espera-se que os alunos concluam que, para n inteiro e positivo, 10^n é o número formado por 1 seguido de n zeros.

c) Reproduzam a tabela abaixo e completem-na atribuindo a n os números inteiros de -1 a -5. construção da tabela

Expoente inteiro negativo (n)	Indicação de 10^n	Potência (resultado)	Número de zeros da potência

d) Comparando a primeira e a última colunas da tabela do item **c**, escrevam uma regra para obter, sem fazer cálculos, a potência indicada por 10^n. Espera-se que os alunos concluam que, para n inteiro e negativo, 10^n é o número formado por 1 antecedido por n zeros com a vírgula entre o primeiro e o segundo zeros.

11 Escreva, em seu caderno, a representação decimal dos números:

a) 10^5 100.000
b) 10^6 1.000.000
c) 10^{-5} 0,00001
d) 10^{-6} 0,000001
e) 10^0 1

12 A distância média do planeta Saturno ao Sol é 1.000.000.000.000 m. Em seu caderno, expresse essa distância por uma potência de 10. 10^{12}

DETLEV VAN RAVENSWAAY/SPL/STOCK PHOTOS

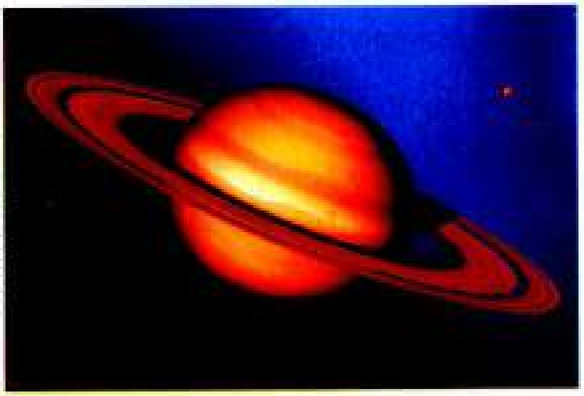


Ilustração do planeta Saturno.

13 Em seu caderno, expresse cada número a seguir como potência de 10.

a) 10.000.000 10^7
b) 0,0000000001 10^{-10}
c) 0,00001 10^{-5}
d) 1 10^0

14 O diâmetro de um fio de cabelo mede aproximadamente 0,0001 m. Em seu caderno, escreva essa medida como uma potência de 10. 10^{-4}

15 No Sistema Internacional de Unidades (SI), para formar um múltiplo ou um submúltiplo de uma unidade de medida basta colocar o prefixo desejado na frente do nome dessa unidade. O mesmo se dá com o símbolo. Por exemplo, para multiplicar ou dividir a unidade byte por 1 milhão, fazemos:

- mega + byte = megabyte;
  1 megabyte = 1.000.000 bytes = 10^6 bytes
- nano + byte = nanobyte;
  1 nanobyte = 0,000001 byte = 10^{-6} byte

Pesquise os vinte prefixos estabelecidos pelo SI no site do Inmetro (www.inmetro.gov.br) e complete, em seu caderno, a tabela abaixo.

Prefixos das unidades SI

Nome	Símbolo	Fator de multiplicação da unidade
yotta	Y	10^{24} = 1.000.000.000.000.000.000.000.000
zetta	Z	10^{21} = 1.000.000.000.000.000.000.000

construção de tabela

16 Determine, em seu caderno, o valor de cada expressão abaixo como uma potência de base 10 e na representação decimal.

a) $\dfrac{10^3 \cdot 10^2}{10^7}$ 10^{-2} e 0,01

b) $\dfrac{10^4 \cdot 10^2}{10^9}$ 10^{-3} e 0,001

c) $\dfrac{10^{-9}}{10^{-4} \cdot 10^{-8}}$ 10^{3} e 1.000

d) $\dfrac{10^{-4} \cdot 10^{-8}}{10^{-9}}$ 10^{-3} e 0,001

Pense mais um pouco...

Mostre que multiplicar 3 por 10^4 é o mesmo que dividir 3 por 10^{-4}. resposta pessoal

Multiplicação e divisão por potências de 10

- Para multiplicar, de maneira prática, um número por 10, 10^2, 10^3, ..., deslocamos a vírgula uma, duas, três, ... casas para a direita. Fazemos assim porque, nesse caso (expoente inteiro positivo), cada uma dessas potências tem um, dois, três, ... zeros.

Exemplos:

a) $5{,}126 \cdot 10^1 = 51{,}26$

b) $0{,}0028 \cdot 10^2 = 0{,}28$

c) $12 \cdot 10^3 = 12.000$

d) $8{,}56 \cdot 10^4 = 85.600$

- Para multiplicar um número por 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, ..., deslocamos a vírgula uma, duas, três, ... casas para a esquerda, o que equivale a dividir por 10^1, 10^2, 10^3, ... ou por 10, 100, 1.000, ...

Exemplos:

a) $356 \cdot 10^{-2} = 3{,}56$

b) $25.678{,}2 \cdot 10^{-3} = 25{,}6782$

c) $0{,}5 \cdot 10^{-1} = 0{,}05$

d) $2{,}45 \cdot 10^{-3} = 0{,}00245$

Embora, nesses dois casos, tenhamos feito multiplicações por potências de 10, também poderíamos fazer divisões. Veja duas dessas multiplicações transformadas em divisões:

Sinais contrários

- $8{,}56 \cdot 10^4 = 8{,}56 \cdot \dfrac{1}{10^{-4}} = \dfrac{8{,}56}{10^{-4}} = 8{,}56 : 10^{-4}$

Sinais contrários

- $0{,}5 \cdot 10^{-1} = 0{,}5 \cdot \dfrac{1}{10^1} = \dfrac{0{,}5}{10^1} = 0{,}5 : 10^1$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

17 Efetue em seu caderno:

a) $3,6 \cdot 10^4$ 36.000
b) $0,025 \cdot 10^2$ 2,5
c) $0,4 \cdot 10^{-2}$ 0,004
d) $3.576 \cdot 10^{-3}$ 3,576

18 Calcule em seu caderno.
(Osec-SP) O produto $0,000015 \cdot 0,000000002$ é igual a: alternativa b

a) $3 \cdot 10^{-40}$
b) $3 \cdot 10^{-14}$
c) $30 \cdot 10^{-14}$
d) $30 \cdot 10^{-15}$
e) $3 \cdot 10^{-4}$

19 Calcule em seu caderno.
(PUC-MG) O valor da expressão $A = 1,67 \cdot 10^{-24} + 3,95 \cdot 10^{-22}$ é: alternativa a

a) $3,9667 \cdot 10^{-22}$
b) $3,9667 \cdot 10^{-23}$
c) $3,9667 \cdot 10^{-24}$
d) $3,9667 \cdot 10^{-42}$
e) $3,9667 \cdot 10^{-46}$

20 Em seu caderno, descubra a potência de 10 que deve ser colocada no lugar de a para que se obtenha:

a) $56,754 \cdot a = 567.540$ 10^4
b) $0,003 \cdot a = 30$ 10^4
c) $a \cdot 23 = 0,000023$ 10^{-6}
d) $a \cdot 4,5 = 0,00045$ 10^{-4}

21 Calcule, em seu caderno, o valor de:

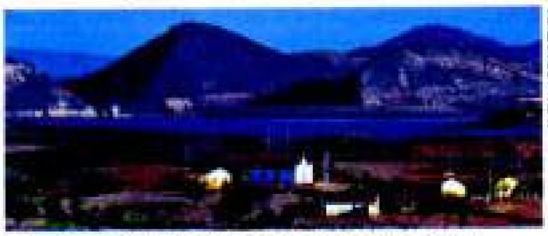
a) $M = 3x^2 - 10x - 100$ para $x = 10^2$ 28.900
b) $M = 5x^2 - 3x - 10.000$ para $x = 10^3$ 4.987.000

22 Converta usando potências de 10.

a) 1 cm em m 10^{-2} m
b) 100 km em m 10^5 m
c) 10 g em kg 10^{-2} kg
d) 1 t em kg 10^3 kg
e) 10 cm² em m² 10^{-3} m²
f) 1 cm³ em dm³ 10^{-3} dm³

23 Calcule e responda em seu caderno.
(UFMG) O açude de Orós, um dos maiores reservatórios do Brasil, tem capacidade para armazenar $2 \cdot 10^9$ m³ de água. Sabe-se que o rio Amazonas lança no oceano Atlântico 50 milhões de litros de água por segundo.
Com base nesses dados, é correto afirmar que o tempo que o rio Amazonas leva para lançar no oceano Atlântico um volume igual à capacidade do açude Orós é: alternativa d

a) maior que 20 horas.
b) menor que 5 horas.
c) maior que 5 horas e menor que 10 horas.
d) maior que 10 horas e menor que 20 horas.



ALEX LARBAC/TYBA

O açude de Orós, localizado no município de Orós (Ceará), é formado pela barragem das águas do rio Jaguaribe. (Foto de 2007).

Notação científica

Muitas vezes, informações como as que estão abaixo são dadas em forma de potência.

ILUSTRAÇÕES: VICENTE MENDONÇA

Esse tipo de registro é chamado de **notação científica**.

A notação científica fornece uma ideia clara da ordem de grandeza (bilhões, milhões, milésimos etc.), fundamental quando lidamos com números "muito grandes" ou "muito pequenos". A ordem de grandeza é dada pela potência de 10.

Em geral, esses números são escritos como produto de dois fatores em que um deles é uma potência de 10 com expoente inteiro (positivo ou negativo) e o outro é um número igual a 1 ou maior que 1 e menor que 10.

Observe os exemplos:

$1 \cdot \boxed{10^{-6}}$

$5 \cdot \boxed{10^{-6}}$

$6{,}96 \cdot \boxed{10^{8}}$

Potência de 10 com expoente inteiro

Número igual a 1 ou maior que 1 e menor que 10

Os números abaixo estão escritos em notação científica:

- $5{,}2 \cdot 10^{6}$
- $1{,}25 \cdot 10^{-3}$
- $8{,}1 \cdot 10^{12}$
- $2{,}236 \cdot 10^{-9}$

Vamos agora escrever em notação científica os seguintes números:

a) 3.265

Como o número deverá ter apenas um algarismo não nulo na parte inteira, devemos multiplicá-lo por 10^{-3} e, para não mudar seu valor, multiplicamos por 10^{3}, pois $10^{-3} \cdot 10^{3} = 10^{0} = 1$.

Assim: $3.265 = \underbrace{3.265 \cdot 10^{-3}}\cdot 10^{3} = \underbrace{3{,}265}\cdot 10^{3}$

Lugar da vírgula

b) $28{,}5 = \underbrace{28{,}5 \cdot 10^{-1}} \cdot 10 = \underbrace{2{,}85} \cdot 10$

Lugar da vírgula

c) $0{,}0056 = \underbrace{0{,}0056 \cdot 10^{3}} \cdot 10^{-3} = \underbrace{5{,}6} \cdot 10^{-3}$

Lugar da vírgula

d) $0{,}65 = \underbrace{0{,}65 \cdot 10} \cdot 10^{-1} = \underbrace{6{,}5} \cdot 10^{-1}$

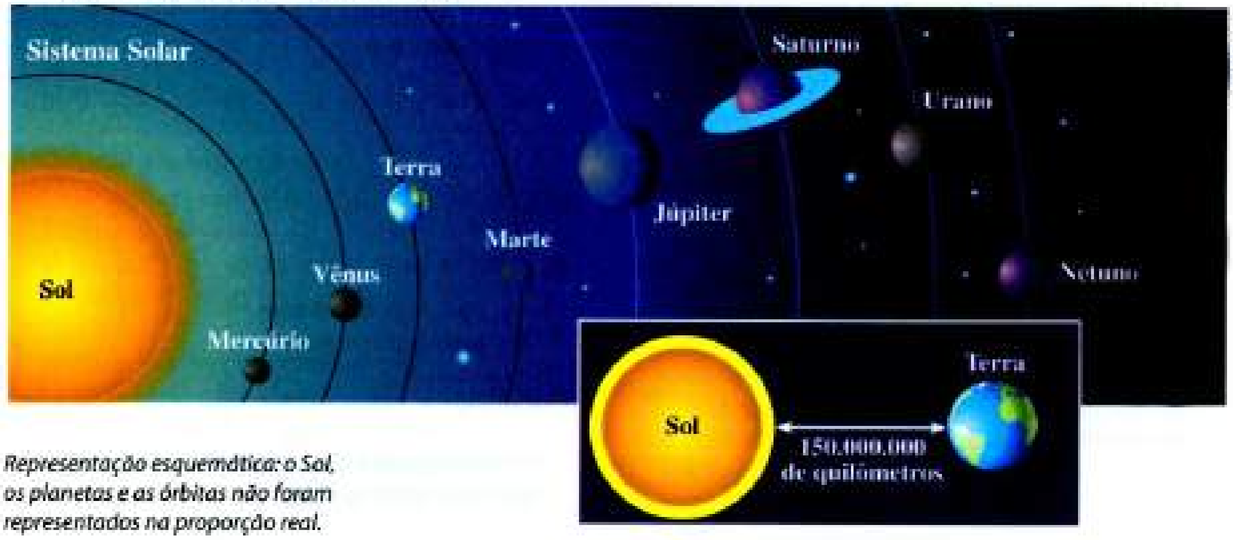
Lugar da vírgula

VICENTE MENDONÇA

Veja como usar a notação científica para expressar:

a) a distância da Terra ao Sol

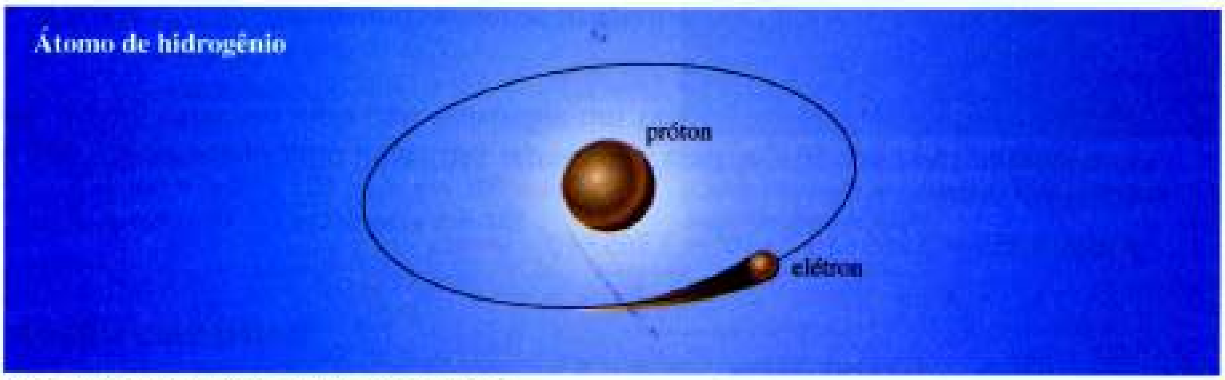
$150.000.000 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$



Representação esquemática: o Sol, os planetas e as órbitas não foram representados na proporção real.

b) a massa do átomo de hidrogênio

$0,00000000000000000000000166 \text{ g} = 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$



Representação esquemática, fora da proporção real.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

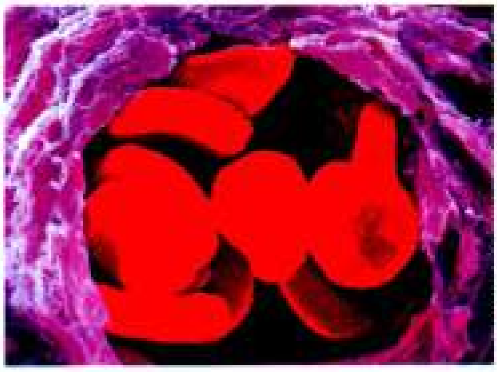
24 Expresse, em seu caderno, por meio da notação científica os números:

a) 12,6 milhões $1,26 \cdot 10^7$
b) $361 \cdot 10^6$ $3,61 \cdot 10^8$
c) 15 bilhões $1,5 \cdot 10^{10}$
d) $458,6 \cdot 10^{-5}$ $4,586 \cdot 10^{-3}$
e) $3.576 \cdot 10^{-3}$ $3,576 \cdot 10^0$ ou 3,576
f) 0,0000000000001 $1 \cdot 10^{-13}$

25 A massa do Sol é de aproximadamente $2 \cdot 10^{30}$ kg. Expresse, em notação científica, essa massa em toneladas. $2 \cdot 10^{27}$ t

26 Dois planetas, A e B, giram em torno do Sol em órbitas praticamente circulares e no mesmo plano. A distância de A até o Sol é de $15 \cdot 10^7$ km e a distância de B até o Sol é de $2,3 \cdot 10^8$ km, considerando-se desprezíveis seus diâmetros. Em seu caderno, calcule a distância máxima e a distância mínima entre A e B e expresse-as em notação científica.
$38 \cdot 10^7$ km; $8 \cdot 10^7$ km

27 Cada mililitro de sangue humano contém, em média, $5 \cdot 10^6$ glóbulos vermelhos. Um ser humano adulto tem, em média, 5,5 litros de sangue. De acordo com esses dados, qual é o número médio de glóbulos vermelhos de um adulto? $2{,}75 \cdot 10^{10}$



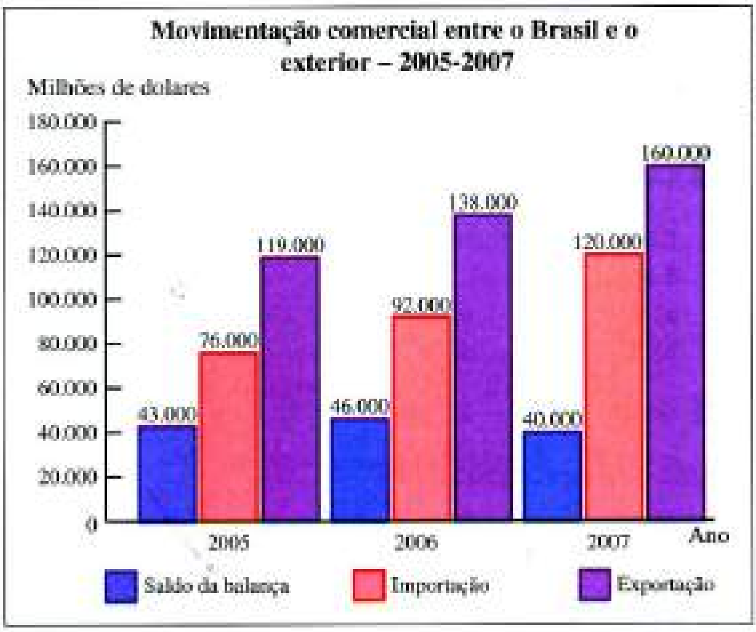
Glóbulos vermelhos (hemácias) passando por uma arteríola (artéria finíssima), com colorido artificial (ampliação de 1.740 vezes).

28 Resolva o problema em seu caderno.

(UFSE) Um raio de luz, propagando-se no vácuo, desloca-se com velocidade de $3{,}0 \cdot 10^5$ km/s aproximadamente. Se a distância entre dois planetas é de $9{,}0 \cdot 10^7$ km, então, o tempo, em minuto, que o raio de luz levará para cobrir essa distância é: alternativa b

a) 5,2 **b)** 5 **c)** 4,5 **d)** 4 **e)** 3,8

29 No gráfico ao lado, vamos considerar os valores aproximados indicados em cada coluna. Reúna-se com um colega, copiem o gráfico no caderno e façam o que se pede.



Fonte: *Brasil em números*. v. 16. Rio de Janeiro: IBGE (Centro de Documentação e Disseminação de Informações), 2008. p. 310.

a) Expressem em notação científica os valores, em dólares, apresentados no gráfico.

b) Para cada ano, verifiquem se a diferença entre a exportação e a importação é igual ao saldo da balança. sim

c) Qual foi a média das exportações nesse período? E das importações? E do saldo da balança? $1{,}39 \cdot 10^{11}$; $9{,}6 \cdot 10^{10}$; $4{,}3 \cdot 10^{10}$

d) Para cada ano, escrevam com um número negativo o quanto falta para a exportação atingir a média ou com um número positivo em quanto a exportação excedeu a média. Qual é a soma dos três números escritos? 2005: $-2 \cdot 10^{10}$; 2006: $-1 \cdot 10^{10}$; 2007: $+2{,}1 \cdot 10^{10}$; zero

e) No gráfico de seu caderno, tracem uma reta horizontal pelo valor da média das exportações. Façam uma estimativa para responder à questão: a parte da coluna da exportação de 2007 que está acima da reta traçada é equivalente à soma das partes, das outras duas colunas, que faltam para chegarem à reta traçada? sim

a) exportação: $1{,}19 \cdot 10^{11}$ (2005); $1{,}38 \cdot 10^{11}$ (2006); $1{,}6 \cdot 10^{11}$ (2007); importação: $7{,}6 \cdot 10^{10}$ (2005); $9{,}2 \cdot 10^{10}$ (2006); $1{,}2 \cdot 10^{11}$ (2007); saldo da balança: $4{,}3 \cdot 10^{10}$ (2005); $4{,}6 \cdot 10^{10}$ (2006); $4 \cdot 10^{10}$ (2007).

Pense mais um pouco...

Um ano-luz corresponde à distância percorrida pela luz, no vácuo, durante um ano, à velocidade de 300.000 km por segundo (velocidade da luz).

a) Em seu caderno, escreva, em notação científica, a distância percorrida pela luz em 2 anos-luz. $1{,}89216 \cdot 10^{13}$ km

b) A distância do Sol à Terra é $1{,}5 \cdot 10^8$ km. Em quantos segundos a luz percorre essa distância? 500 s

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

30 Sendo $x = (2^2)^3$, $y = (2^3)^2$ e $z = 2^{3^2}$, calcule, em seu caderno $x \cdot y \cdot z$ na forma de uma potência. 2^{21}

31 Uma célula, em certas condições, divide-se em duas a cada 30 segundos. Quantas células haverá depois de 20 minutos? Escreva em seu caderno a resposta em forma de potência. 2^{40}

32 Calcule e responda em seu caderno.
(Vunesp) O valor da expressão

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$ é: alternativa a

a) $\frac{3}{4}$
b) $\frac{4}{3}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{4}$
e) 5

33 Calcule e responda em seu caderno.
(UFSM-RS) O valor da expressão $\dfrac{16^{\frac{3}{4}}}{8^{\frac{1}{3}}} : \dfrac{2^4}{8^2}$ é igual a: alternativa d

a) 2^{-1}
b) 2^0
c) $2^{\frac{1}{2}}$
d) 2^4
e) 2^6

34 Sendo $a = 5^0 - 2^{-2}$, $b = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1}$ e $c = 12^0 - 3$, calcule em seu caderno: $\frac{16}{9}$

a) a^b $\frac{9}{16}$
b) $(b - a)^c$ $\frac{16}{25}$
c) $\left(\frac{ab}{c}\right)^c$

35 Escreva, no caderno, cada potência abaixo na forma de fração.

a) $(2,5)^{-2}$ $\frac{4}{25}$
b) $(0,15)^{-3}$ $\frac{8.000}{27}$

36 Resolva as expressões e apresente, em seu caderno, os resultados em notação científica.

a) $\dfrac{3,6 \cdot 10^4}{10^{-2} \cdot 1,2}$ $3 \cdot 10^6$
b) $\dfrac{2,1 \cdot 10^{-2}}{10^{-3} \cdot 0,7}$ $3 \cdot 10$

37 A massa de um átomo de carbono é de aproximadamente $1,99 \cdot 10^{-26}$ kg. Expresse, em notação científica, essa massa em gramas. $1,99 \cdot 10^{-23}$ g

38 Calcule e responda em seu caderno.
(Vunesp) Se $x = 10^{-3}$, então

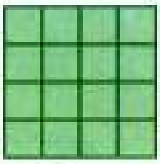
$$\frac{(0,1) \cdot (0,001) \cdot 10^{-1}}{10 \cdot (0,0001)}$$ é igual a: alternativa b

a) $100x$
b) $10x$
c) x
d) $\frac{x}{10}$
e) $\frac{x}{100}$

39 Calcule e responda em seu caderno.
(FCC-SP) A expressão $\dfrac{0,000036}{80.000}$ é equivalente a: alternativa d

a) $0,45 \cdot 10^{-12}$
b) $4,5 \cdot 10^{-12}$
c) $4,5 \cdot 10^{-11}$
d) $45 \cdot 10^{-11}$
e) $45 \cdot 10^{-10}$

2. Calculando com raízes


NELSON MATSUDA

Considere o quadrado ao lado.

Tomando o quadradinho como unidade de área, podemos dizer que a área desse quadrado é 16 ($4^2 = 16$).

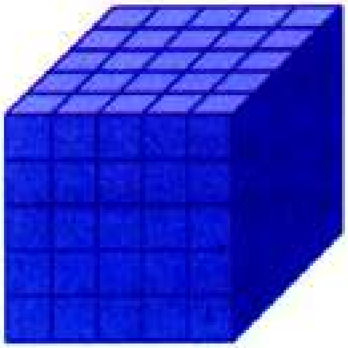
Considere agora a situação inversa. Sabendo que a área do quadrado é 16 e que o lado do quadradinho mede 1, vamos calcular a medida do lado desse quadrado. Essa medida é dada por um número que, elevado ao quadrado, dá 16. Esse número é a **raiz quadrada** de 16.

Assim: $\sqrt{16} = 4$, pois $4^2 = 16$

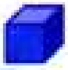
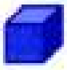
(lê-se: "raiz quadrada de 16")

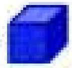
Então, a medida do lado do quadrado é 4.

Agora observe o cubo abaixo.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Tomando o cubinho  como unidade de medida de volume, podemos dizer que o volume do cubo é 125  ($5^3 = 125$).

A situação inversa é calcular a medida da aresta do cubo sabendo que o volume é 125  e que a medida da aresta de um cubinho é 1. A medida da aresta do cubo é expressa por um número que, elevado ao cubo, dá 125. Esse número é a **raiz cúbica** de 125.

Assim: $\sqrt[3]{125} = 5$, pois $5^3 = 125$

(lê-se: "raiz cúbica de 125")

Então, a aresta do cubo mede 5.

Da mesma forma, temos:

a) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}} = \dfrac{1}{3}$, pois $\left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{1}{81}$

(lê-se: "raiz quarta de $\frac{1}{81}$")

b) $\sqrt[5]{-32} = -2$, pois $(-2)^5 = -32$

(lê-se: "raiz quinta de -32")

OBSERVAÇÕES

- **Índice** → $\sqrt[n]{a} = b$ ← **Raiz**

  Radicando

  (lê-se: "raiz enésima de *a* é igual a *b*")

  O sinal $\sqrt{\ }$ é chamado de **radical**.

- Embora *radical* seja o nome do sinal $\sqrt{\ }$, normalmente usamos essa mesma palavra para indicar a raiz quadrada de um número *a*.

Sendo *n* um número natural diferente de zero e *a* um número real, temos dois casos:

- Se *n* é par e *a* é um número real, $a \geqslant 0$: $\sqrt[n]{a}$ é o número real *b*, $b \geqslant 0$, tal que $b^n = a$.
- Se *n* é ímpar e *a* é um número real: $\sqrt[n]{a}$ é o número real *b* tal que $b^n = a$.

Acompanhe os exemplos de cada caso.

Caso 1: *n* é um número natural não nulo par e a é um número positivo

Vamos, como exemplo, calcular a raiz quadrada de 25.

Temos dois números reais que, elevados ao quadrado, resultam em 25. São eles -5 e $+5$, pois $(-5)^2 = 25$ e $(+5)^2 = 25$.

Devemos, então, dizer que a raiz quadrada de 25 é 5 ou -5. Convencionou-se que o símbolo $\sqrt{25}$ representa a raiz positiva de 25, isto é, $\sqrt{25} = 5$.

Veja estes outros exemplos:

- $\sqrt{36} = 6$
- $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{2}{3}$
- $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$
- $\sqrt{7} \simeq 2{,}64$

Observe que o número 2,64 é a representação decimal de $\sqrt{7}$ com duas casas decimais. Com o auxílio de uma calculadora, podemos obter uma representação decimal com mais casas decimais.

OBSERVAÇÃO

Note que, se a é um número real e $a < 0$, sendo n par, não é possível definir $\sqrt[n]{a}$ em $\mathbb{R}$.

Vamos, como exemplo, mostrar que $\sqrt{-4}$ não representa um número real.

De fato, se $\sqrt{-4}$ fosse um número real m, então deveríamos ter $m^2 = -4$, o que é impossível, pois o quadrado de qualquer número real é sempre um número não negativo. Logo, $\sqrt{-4}$ não é um número real.

Caso 2: *n* é um número natural ímpar

Considere como exemplo as raízes de índice ímpar:

- $\sqrt[3]{64} = 4$, pois $4^3 = 64$
- $\sqrt[3]{-64} = -4$, pois $(-4)^3 = -64$

Quando n for ímpar, a raiz enésima tem o mesmo sinal do radicando.

OBSERVAÇÃO

A raiz de índice n, com n natural não nulo, de zero é zero, ou seja, $\sqrt[n]{0} = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

40 Responda no caderno.

a) Dois números, elevados ao quadrado, resultam em 100. Quais são eles? -10 e 10

b) Qual é a raiz quadrada de 100? 10

41 Por que não existe a raiz quadrada de -49 quando trabalhamos com números reais? Porque nenhum número real elevado ao quadrado dá -49.

42 Responda em seu caderno se existe ou não um número real que seja:

a) a raiz quadrada de 64? Existe.

b) a raiz quadrada de 20? Existe.

c) a raiz quadrada de -9? Não existe.

d) a raiz quarta de -81? Não existe.

e) a raiz sexta de 100? Existe.

f) a raiz quinta de -32? Existe.

43 Classifique, em seu caderno, cada sentença em verdadeira ou falsa:

a) $\sqrt{10^2} = \sqrt{-10^2}$ F

b) $\sqrt{10^2} = \sqrt{(-10)^2}$ V

c) $\sqrt{(-7)^2} = -7$ F

d) $\sqrt{(-7)^2} = 7$ V

e) $-\sqrt{10^2} = \sqrt{(-10)^2}$ F

f) $-\sqrt{(-10)^2} = -10$ V

g) $\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3]{-8}$ V

h) $\sqrt[n]{0} = 0$ para $n \geq 2$ V

44 Em seu caderno, calcule, se for um número real:

a) O valor de $-\sqrt{441}$; -21

b) O valor real de $\sqrt{-441}$. Não é um número real.

45 Classifique, em seu caderno, em verdadeira ou falsa:

a) $\sqrt{16}$ é igual a 4 ou a -4. F

b) $\sqrt{16}$ é igual a 4. V

c) $\sqrt{16}$ é igual a -4. F

d) $\sqrt{-16}$ não é um número real. V

46 Em seu caderno, calcule o valor de:

a) $2 \cdot \sqrt{900}$ 60

b) $\dfrac{3}{4} \cdot \sqrt{2,56}$ 1,2

c) $\sqrt{0} - \sqrt[5]{-1}$ 1

d) $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}} - \sqrt{\dfrac{25}{64}}$ $-\dfrac{31}{24}$

47 Calcule o valor da expressão:

$\sqrt[3]{18 + \sqrt{84 - \sqrt{4 + \sqrt{25}}}}$ 3

48 A relação $v = 20 \cdot \sqrt{273 + t}$ determina a velocidade do som no ar em função da temperatura. Nessa relação, v representa a velocidade, em metro por segundo, e t, a temperatura, em grau Celsius. Responda em seu caderno:

a) Qual é a velocidade do som à temperatura de 16 °C? E a 51 °C? E a -17 °C. 340 m/s; 360 m/s; 320 m/s

b) O som se propaga mais rapidamente nas regiões polares ou na região equatoriana? na região equatoriana

49 Um objeto solto de determinada altura leva certo tempo para atingir o solo.

Esse tempo é dado pela relação $t = \sqrt{\dfrac{h}{4,9}}$.

Nessa relação, t representa o tempo, em segundo, e h a altura, em metro.

VICENTE MENDONÇA

Calcule e responda no caderno.

Quanto tempo um objeto leva para atingir o solo caindo da altura de 44,1 metros? 3 segundos

50 Sabendo que $273^2 = 74.529$, calcule no caderno:

a) $\sqrt{745,29}$ 27,3

b) $\sqrt{7.452.900}$ 2.730

Pense mais um pouco...

Reúna-se com um colega e repondam às questões no caderno.

a) A raiz cúbica de um número real a é 4. Qual é a raiz sexta de a? 2

b) A raiz sexta de um número real a é 3. Qual é a raiz quadrada de a? 27

3. Potência com expoente fracionário: relacionando radiciação com potenciação

Até aqui, trabalhamos com potências de expoente inteiro. Agora, veremos o significado de potências com expoente fracionário.

Já vimos que, se $b^n = a$, então $b = \sqrt[n]{a}$, com n natural não nulo e $b \geq 0$.

Consideremos agora a potência $(7^3)^2 = 7^6$.

De acordo com a definição de raiz, temos que 7^3 é a raiz quadrada de 7^6, pois $(7^3)^2 = 7^6$. Assim, podemos escrever:

$$\sqrt{7^6} = 7^3 \text{ ou } \sqrt{7^6} = 7^{\frac{6}{2}}$$

Expoente do radicando

Índice da raiz

Todo radical de radicando positivo pode ser escrito como uma potência em que a base é o radicando e o expoente é expresso por uma fração que tem, no numerador, o expoente do radicando e, no denominador, o índice do radical.

Veja os exemplos:

a) $5^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{5^3}$, pois $\left(5^{\frac{3}{8}}\right)^8 = 5^{\frac{3}{8}\cdot 8} = 5^3$

b) $3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2}$, pois $\left(3^{\frac{2}{7}}\right)^7 = 3^{\frac{2}{7}\cdot 7} = 3^2$

c) $8^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}$, pois $\left[\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3 = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}\cdot 3} = \left(\dfrac{1}{8}\right)^2$

Se a é um número real positivo, m é um número inteiro e n é um número natural não nulo, temos: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Veja outros exemplos:

a) $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt[3]{2^{15}} = 2^{\frac{15}{3}} = 2^5$

c) $\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$

d) $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

e) $7^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{7^4}$

f) $20^{\frac{1}{2}} = \sqrt{20}$

g) $9^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$

h) $0{,}25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

OBSERVAÇÃO

As propriedades válidas para as potências de expoente inteiro são também válidas para as potências de expoente fracionário que tenham base positiva.

Por exemplo:

a) $3^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}} = 3^{\frac{13}{15}}$

b) $7^{\frac{2}{5}} : 7^{\frac{1}{9}} = 7^{\frac{2}{5}-\frac{1}{9}} = 7^{\frac{13}{45}}$

c) $\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{10}}$

55. a) $5^{\frac{6}{12}}$; $5^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{5}$ b) $11^{\frac{6}{9}}$; $11^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[3]{11^2}$ c) $2{,}5^{\frac{7}{14}}$; $2{,}5^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{2{,}5}$ d) $2{,}5^{\frac{14}{21}}$; $2{,}5^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[3]{2{,}5^2}$ e) $1{,}3^{\frac{9}{6}}$; $1{,}3^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{1{,}3^3}$ f) $0{,}3^{\frac{12}{20}}$; $0{,}3^{\frac{3}{5}}$; $\sqrt[5]{0{,}3^3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

51 Em seu caderno, represente na forma de potência com expoente fracionário:

a) $\sqrt[3]{2^2}$ $2^{\frac{2}{3}}$ b) $\sqrt[4]{5^3}$ $5^{\frac{3}{4}}$ c) $\sqrt[3]{10}$ $10^{\frac{1}{3}}$

52 Represente, em seu caderno, na forma de radical:

a) $2^{\frac{3}{4}}$ $\sqrt[4]{2^3}$ b) $9^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{9}$ c) $8^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{8}$

53 Em seu caderno, reduza a uma só potência, usando as propriedades das potências:

a) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}$ $2^{\frac{7}{12}}$ b) $\left[(12)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{4}{3}}$ $12^{\frac{2}{3}}$ c) $2^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{4}}$ $2^{\frac{1}{12}}$

54 Calcule no caderno o valor de:

a) $\sqrt{3^6}$ 27 c) $\left(\dfrac{4}{49}\right)^{0,5}$ $\frac{2}{7}$

b) $512^{\frac{1}{3}}$ 8 d) $\sqrt[4]{2^8}$ 4

55 Reúna-se com um colega e façam o que se pede no caderno.

- Representem cada radical abaixo na forma de potência com expoente fracionário.
- Simplifiquem, se possível, a fração do expoente da potência obtida.
- Representem a potência com expoente simplificado na forma de radical.
- Comparem cada radical dado com o respectivo radical obtido com os procedimentos realizados. Escrevam uma regra prática para simplificar, quando possível, um radical.

a) $\sqrt[12]{5^6}$ d) $\sqrt[21]{2{,}5^{14}}$

b) $\sqrt[9]{11^6}$ e) $\sqrt[6]{1{,}3^9}$

c) $\sqrt[14]{2{,}5^7}$ f) $\sqrt[20]{0{,}3^{12}}$

Espera-se que os alunos percebam que, na prática, basta dividir o índice do radical e o expoente do radicando por um divisor comum, e tenham a oportunidade de antecipar informalmente a 2ª propriedade dos radicais.

4. Propriedades dos radicais

1ª propriedade


VICENTE MENDONÇA

Considerando o radical $\sqrt[3]{5^3}$, temos:

$$\sqrt[3]{5^3} = 5^{\frac{3}{3}} = 5^1 = 5$$

Da mesma forma:

$$\sqrt[4]{5^4} = 5 \text{ e } \sqrt[3]{(-5)^3} = -5,$$

mas

$$\sqrt[4]{(-5)^4} = 5,$$

pois $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$ e $\sqrt[4]{625} = 5$.

Ao calcular $\sqrt[3]{(-5)^3}$, estamos extraindo uma raiz de índice ímpar de um número negativo, ou seja, $\sqrt[3]{-125}$. O resultado é um número negativo, -5, pois $(-5)^3 = -125$.

Entretanto, ao calcular $\sqrt[4]{(-5)^4}$, extraímos a raiz de índice par de um número positivo, isto é, $\sqrt[4]{625}$, que é 5, positivo, pois $5^4 = 625$.

De modo geral:
- se n é um número natural ímpar, então $\sqrt[n]{a^n} = a$, sendo a um número real;
- se n é um número natural par não nulo, então $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, sendo a um número real.

Veja alguns exemplos:

a) $\sqrt[3]{2^3} = 2$

b) $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

c) $\sqrt{5^2} = |5| = 5$

d) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

OBSERVAÇÃO

Quando o radicando for uma potência de expoente par que tenha na base uma expressão literal que represente um número real, admitiremos que o radicando assume apenas valores reais iguais a zero ou maiores que zero.

Assim:

a) $\sqrt[4]{x^4} = x$ **Estamos admitindo que $x \geqslant 0$**

b) $\sqrt{(3x-5)^2} = 3x - 5$ **Estamos admitindo que $3x - 5 \geqslant 0$**

2ª propriedade

Observe:

$$\sqrt[12]{3^8} = 3^{\frac{8}{12}} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$$

Escrevendo na forma de potência **Simplificando a fração do expoente** **Escrevendo na forma de raiz**

Assim: $\sqrt[12]{3^8} = \sqrt[12:4]{3^{8:4}} = \sqrt[3]{3^2}$

Dividindo-se o índice e o expoente do radicando por um mesmo número natural maior que zero, o valor do radical não se altera, ou seja:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$$

sendo a um número real positivo, m um número inteiro, n um número natural não nulo e p divisor de m e n.

Essa propriedade permite simplificar certos radicais, isto é, transformá-los em radicais mais simples e equivalentes aos radicais dados.

Vamos, como exemplo, simplificar os seguintes radicais:

a) $\sqrt[12]{2^9} = \sqrt[12:3]{2^{9:3}} = \sqrt[4]{2^3}$ **Dividindo o índice e o expoente por 3, que é divisor de 12 e de 9**

b) $\sqrt[20]{7^{15}} = \sqrt[20:5]{2^{15:5}} = \sqrt[4]{7^3}$ **Dividindo o índice e o expoente por 5, que é divisor de 20 e de 15**

c) $\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6:3]{5^{3:3}} = \sqrt{5}$

Decompondo 125 em fatores primos **Dividindo o índice e o expoente por 3**

3ª propriedade

Observe:

$$\sqrt{3 \cdot 5} = (3 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$$

Em geral, sendo a e b números reais positivos e n um número natural não nulo, temos:

$$\underbrace{\sqrt[n]{a \cdot b}}_{\text{Radical de um produto}} = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}_{\text{Produto dos radicais}}$$

Veja os exemplos:

a) $\sqrt[3]{4 \cdot 3} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[5]{7 \cdot 10} = \sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{10}$

4ª propriedade

Observe:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Em geral, sendo a e b números reais positivos, $b \neq 0$, e n um número natural não nulo, temos:

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}}_{\text{Radical de um quociente}} = \underbrace{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}_{\text{Quociente dos radicais}}$$

Veja os exemplos:

a) $\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}}$

Essas propriedades permitem simplificar certos radicais tirando-se fatores do radicando.

Vamos, como exemplo, simplificar os radicais:

a) $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2} = \sqrt{2} \cdot 5 = 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{24} = \sqrt{2^3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

c) $\sqrt[3]{\frac{625}{64}} = \frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{5^3 \cdot 5}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{\sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5}}{2^2} = \frac{5\sqrt[3]{5}}{4}$

Da mesma forma que podemos tirar fatores do radicando, podemos fazer o inverso, ou seja, introduzir fatores externos no radicando. Veja os exemplos:

a) $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5}$

b) $3\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5}$

c) $2\sqrt[4]{18} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 18}$

d) $7\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{7^3 \cdot 7^2} = \sqrt[3]{7^5}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

56 Calcule em seu caderno:

a) $\sqrt[3]{10^3}$ 10

b) $\sqrt[4]{1{,}7^4}$ $1{,}7$

c) $\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2}$ $\frac{5}{6}$

57 Em seu caderno, simplifique os radicais.

a) $\sqrt[8]{5^6}$ $\sqrt[4]{5^3}$

b) $\sqrt[15]{3^{20}}$ $\sqrt[3]{3^4}$

c) $\sqrt[6]{11^3}$ $\sqrt{11}$

58 Decomponha o radicando em fatores primos e simplifique os radicais.

a) $\sqrt[10]{32}$ $\sqrt{2}$

b) $\sqrt[6]{27}$ $\sqrt{3}$

c) $\sqrt[4]{0{,}36}$ $\sqrt{0{,}6}$

59 Simplifique, em seu caderno, os radicais sabendo que $a \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ e $m \geqslant 0$.

a) $\sqrt[6]{a^3}$ $\sqrt{a}$

b) $\sqrt[20]{x^{15}}$ $\sqrt[4]{x^3}$

c) $\sqrt[9]{y^6}$ $\sqrt[3]{y^2}$

60 Em seu caderno, transforme em um produto de radicais.

a) $\sqrt{4 \cdot 5}$ $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2 \cdot 3}$ $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[4]{7 \cdot 10}$ $\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{10}$

61 Represente, em seu caderno, como um quociente de radicais.

a) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{18}{5}}$ $\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{5}}$

c) $\sqrt[5]{\frac{2}{9}}$ $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{9}}$

62 Simplifique os radicais em seu caderno.

a) $\sqrt{8}$ $2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{27 \cdot 5}$ $3\sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt[5]{2^7}$ $2\sqrt[5]{4}$

d) $\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^4}$ $30\sqrt[4]{24}$

e) $\sqrt[3]{162}$ $3\sqrt[3]{6}$

63 Em seu caderno, introduza nos radicais os fatores externos em cada caso.

a) $2\sqrt{5}$ $\sqrt{2^2 \cdot 5}$

b) $3\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{3^3 \cdot 2}$

c) $-2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{10}$ $\sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 3^3 \cdot 10}$

d) $\frac{2}{3}\sqrt{5}$ $\sqrt{\frac{2^2 \cdot 5}{3^2}}$

e) $0{,}2\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{(0{,}2)^3 \cdot 2}$

f) $2\sqrt[4]{3}$ $\sqrt[4]{2^4 \cdot 3}$

5. Adição algébrica com radicais

Acompanhe duas formas de efetuar a adição algébrica com radicais.

1ª forma

Substituímos as raízes por seus valores e fazemos os cálculos indicados. Por exemplo:

a) $\sqrt{49} + \sqrt{16} = 7 + 4 = 11$

b) $\sqrt[3]{8} - \sqrt[4]{16} = 2 - 2 = 0$

c) $-5\sqrt[3]{0{,}125} + 2\sqrt{1{,}69} = -5 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 1{,}3 = -2{,}5 + 2{,}6 = 0{,}1$

2ª forma

Havendo vários radicais iguais, podemos colocá-los em evidência. Por exemplo:

Colocando em evidência o fator comum

a) $10\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = (10 + 4 - 1)\sqrt[3]{2} = 13\sqrt[3]{2}$

Fator comum

b) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{7} - 5\sqrt{5} + \sqrt{7} + 4\sqrt{7} = (3 - 5)\sqrt{5} + (2 + 1 + 4)\sqrt{7} = -2\sqrt{5} + 7\sqrt{7}$

A expressão $-2\sqrt{5} + 7\sqrt{7}$ não pode mais ser reduzida, porque seus termos não têm radicais iguais. Contudo, podemos encontrar um valor aproximado para ela.

Como $\sqrt{5} \simeq 2{,}2$ e $\sqrt{7} \simeq 2{,}6$, temos:

$-2\sqrt{5} + 7\sqrt{7} \simeq -2 \cdot 2{,}2 + 7 \cdot 2{,}6$

$-2\sqrt{5} + 7\sqrt{7} \simeq 13{,}8$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 2\sqrt{75} = 2 \cdot \sqrt{3^2 \cdot 3} + 5\sqrt{2^2 \cdot 3} - 2\sqrt{3 \cdot 5^2} =$
$= 2 \cdot 3\sqrt{3} + 5 \cdot 2\sqrt{3} - 2 \cdot 5\sqrt{3} = 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

64 Calcule o valor das expressões em seu caderno:

a) $\sqrt{25} + \sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{81}$ 11

b) $\sqrt[3]{-64} + \sqrt{64} + \sqrt[6]{64}$ 6

c) $2\sqrt{4{,}41} - 3\sqrt{2{,}56}$ $-0{,}6$

65 Efetue em seu caderno:

a) $3\sqrt{5} + \sqrt{5} - 6\sqrt{5}$ $-2\sqrt{5}$

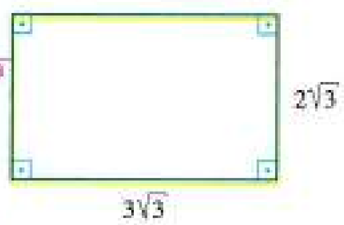
b) $4\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$ $2\sqrt{2} + 15\sqrt{3}$

c) $2\sqrt[5]{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt[5]{3}$ $5\sqrt[5]{3} + \sqrt{3}$

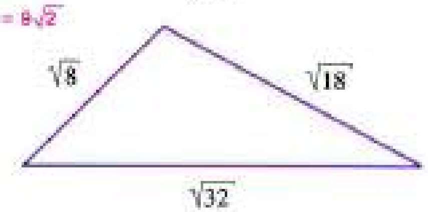
d) $3 + \sqrt{2} + 7 - 5\sqrt{2}$ $10 - 4\sqrt{2}$

66 No caderno, determine o perímetro das figuras, cujas medidas dos lados são dadas em uma mesma unidade de medida de comprimento.

a) $P = 10\sqrt{3}$



b) $P = 9\sqrt{2}$



ILUSTRAÇÕES: WELSON MATSUDA

67 Em seu caderno, reduza os radicais a uma expressão na forma $a\sqrt{b}$, com a e b inteiros.

a) $\sqrt{20} + \sqrt{45}$ $5\sqrt{5}$

b) $4\sqrt{63} - \sqrt{7}$ $11\sqrt{7}$

c) $\sqrt{50} + \sqrt{98} - \sqrt{72}$ $6\sqrt{2}$

d) $\sqrt{12} + \sqrt{75} + \sqrt{108}$ $13\sqrt{3}$

68 Resolva no caderno.

(PUC-Campinas-SP) Efetuando-se

$\sqrt[3]{\dfrac{14}{125} + \sqrt{\dfrac{3}{5} - \dfrac{11}{25}}}$, obtém-se: alternativa d

a) $\dfrac{\sqrt[3]{14} + 2}{5}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{114}}{5}$

c) $\dfrac{6}{5}$

d) $\dfrac{4}{5}$

e) $\dfrac{3}{5}$

69 Calcule em seu caderno.

(PUC-RS) O valor numérico de

$\sqrt{\dfrac{3}{4} - x} + \sqrt{2x} - \dfrac{3}{2} \cdot \sqrt{1 - 4x}$

para $x = \dfrac{1}{12}$ é: alternativa d

a) 12
b) 10
c) 6
d) 0
e) -2

6. Multiplicação e divisão com radicais

Multiplicação com radicais

Para multiplicar radicais de mesmo índice, aplicamos a 3ª propriedade dos radicais:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

sendo n um número natural não nulo e a e b números reais positivos.

Logo, para multiplicar radicais de mesmo índice, devemos conservar o índice e multiplicar os radicandos, simplificando, sempre que possível, o resultado obtido.

Veja os exemplos:

a) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2 \cdot 8} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

b) $-5\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} = (-5 \cdot 3)\sqrt{3 \cdot 2} = -15\sqrt{6}$

c) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 2) = \sqrt{4} + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$ **Aplicando a propriedade distributiva**

d) $\left(5 + \sqrt{7}\right) \cdot \left(2 - \sqrt{7}\right) = 5 \cdot 2 - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - \sqrt{7^2} = 10 - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 7 = 3 - 3\sqrt{7}$

Se os índices dos radicais forem diferentes, antes da multiplicação, reduzimos esses radicais a um mesmo índice. Veja, por exemplo, como fazemos a redução dos radicais $\sqrt[3]{2^2}$ e $\sqrt[4]{3}$ a um mesmo índice:

$$\sqrt[3]{2^2} = \boxed{2^{\frac{2}{3}}} = \boxed{2^{\frac{8}{12}}} = \boxed{\sqrt[12]{2^8}}$$

$$\sqrt[4]{3} = \boxed{3^{\frac{1}{4}}} = \boxed{3^{\frac{3}{12}}} = \boxed{\sqrt[12]{3^3}}$$

Escrevemos os radicais na forma de potência

Determinamos, no expoente, frações equivalentes de mesmo denominador

Escrevemos as potências na forma de radical

Então, multiplicamos esses dois radicais:

$$\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{2^8} \cdot \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^3} = \sqrt[12]{6.912}$$

Observe que, no desenvolvimento acima, os números considerados são positivos. Mas também poderíamos ter, por exemplo:

- $\sqrt[3]{-5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(-5) \cdot 2} = \sqrt[3]{-10}$
- $\sqrt[3]{-27} \cdot \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-27) \cdot (-8)} = \sqrt[3]{216} = 6$

Divisão com radicais

Para dividir radicais de mesmo índice, aplicamos a 4ª propriedade dos radicais:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

sendo n um número natural não nulo, a e b números reais positivos.

Logo, para dividir radicais de mesmo índice, devemos conservar o índice e dividir os radicandos, simplificando, sempre que possível, o resultado obtido.

Veja os exemplos:

a) $\sqrt[3]{20} : \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{20 : 10} = \sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{28} : \sqrt{7} = \sqrt{28 : 7} = \sqrt{4} = 2$

c) $30\sqrt{15} : 5\sqrt{3} = (30 : 5)\sqrt{15 : 3} = 6\sqrt{5}$

d) $\left(12\sqrt{6} - 2\sqrt{3}\right) : \left(5\sqrt{2}\right) = 12\sqrt{6} : 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} : 5\sqrt{2} = \dfrac{12}{5}\sqrt{3} - \dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

Se os índices dos radicais forem diferentes, antes da divisão, reduzimos esses radicais a um mesmo índice.

Veja um exemplo:

$$\sqrt{2} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

70 Efetue, em seu caderno, as multiplicações.

$\sqrt[3]{30}$ **a)** $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{6}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3}$ 6 **e)** $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6}$ $2\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ 4 **d)** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$ $5\sqrt{2}$ **f)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$ $\sqrt[6]{200}$

71 Aplicando a propriedade distributiva, calcule em seu caderno:

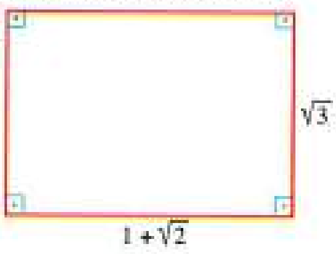
$\sqrt{5} + 5$ **a)** $\sqrt{5} \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)$ **c)** $\left(\sqrt{3} + 2\right) \cdot \left(2\sqrt{3}\right)$ $6 + 4\sqrt{3}$

b) $\left(3\sqrt{2} - 2\right) \cdot \left(\sqrt{2} + 3\right)$ $7\sqrt{2}$

72 Calcule a área e o perímetro das figuras, cujas medidas são dadas em uma mesma unidade de medida de comprimento.

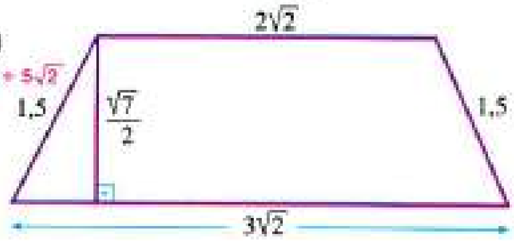
a) $P = 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

$A = \sqrt{3} + \sqrt{6}$



b) $P = 3 + 5\sqrt{2}$

$A = 5$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

73 Calcule: $\left(\sqrt{201} + \sqrt{199}\right) \cdot \left(\sqrt{201} - \sqrt{199}\right)$ 2

74 Efetue as divisões em seu caderno.

a) $\sqrt{12} : \sqrt{3}$ 2 **c)** $12\sqrt[3]{-6} : 3\sqrt[3]{2}$ $4\sqrt[3]{-3}$

b) $\sqrt{50} : \sqrt{2}$ 5 **d)** $\sqrt[3]{6} : \sqrt{3}$ $\sqrt[6]{\dfrac{4}{3}}$

75 Sendo $x = 2\sqrt{50} + 4\sqrt{18} - 3\sqrt{32}$ e $y = \sqrt{2}$, calcule $x : y$ em seu caderno. 10

76 Calcule o valor das expressões.

a) $\left(\sqrt{18} + \sqrt{98} + \sqrt{200}\right) : \left(2\sqrt{2} + \sqrt{8}\right)$ 5

b) $\left(\sqrt{150} - \sqrt{24}\right) : \left(2\sqrt{8} - 3\sqrt{2}\right)$ $3\sqrt{3}$

c) $\left(10\sqrt{27} + 10\sqrt{3}\right) : 10\sqrt{3}$ 4

d) $\left(20\sqrt{10} + 10\sqrt{18}\right) : 2\sqrt{2}$ $10\sqrt{5} + 15$

77 Calcule e responda no caderno.

(Uece) Se $p = 3 + \sqrt{2}$ e $q = 2 - \sqrt{2}$, então, $p \cdot q - p$ é igual a: alternativa a

a) $1 - 2\sqrt{2}$ **c)** $1 + \sqrt{2}$

b) $1 - \sqrt{2}$ **d)** $1 + 2\sqrt{2}$

78 Calcule no caderno.

(Fuvest-SP) Se $a = \sqrt{2}$ e $b = \sqrt[3]{2}$ então, o valor de $a \cdot b$ é: alternativa a

a) $\sqrt[6]{8}$ **b)** $\sqrt[6]{4}$ **c)** $\sqrt{8}$ **d)** $\sqrt{4}$ **e)** $\sqrt[8]{4}$

7. Potenciação com radicais

Observe:

$$\left(\sqrt[5]{3}\right)^4 = \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt[5]{3^4}$$

Então: $\left(\sqrt[5]{3}\right)^4 = \sqrt[5]{3^4}$

Para elevar um radical a uma potência, basta elevar o radicando à potência indicada.

Veja os exemplos:

a) $\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

b) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{3^2}\right)^2 = \sqrt[3]{\left(3^2\right)^2} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$

c) $\left(4\sqrt{5}\right)^3 = 4^3 \cdot \sqrt{5^3} = 64 \cdot \sqrt{5^2 \cdot 5} = 64 \cdot 5\sqrt{5} = 320\sqrt{5}$

d) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + \sqrt{6}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

79 Calcule as potências em seu caderno:

a) $\left(\sqrt{15}\right)^2$ 15

b) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3$ 3

c) $\left(3\sqrt{7}\right)^2$ 63

d) $\left(3\sqrt[4]{3}\right)^4$ 243

e) $\left(\sqrt{10}\right)^3$ $10\sqrt{10}$

f) $\left(2\sqrt[3]{3}\right)^4$ $48\sqrt[3]{3}$

80 Calcule em seu caderno:

a) $\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)^2$ $10 + 2\sqrt{21}$

b) $\left(3 - \sqrt{7}\right)^2$ $16 - 6\sqrt{7}$

81 Qual é o valor da expressão $A = x^4 + x^2 + 2$ para $x = -\sqrt{3}$? 14

PARA SABER mais

A linguagem das máquinas

Cada *software* tem uma sintaxe, isto é, existe uma determinada maneira de digitar os comandos a fim de que a máquina "entenda" corretamente as mensagens que se deseja transmitir.

Paulo tinha um computador no qual para calcular 2^3, a maneira correta de digitar era 2^3.

Ao digitar 2^3 e, em seguida, pedir o resultado, a resposta era 8.

Para calcular potências de potências, os parênteses eram necessários.

De fato, digitar 2^3^2 significava $2^{3^2} = 2^9 = 512$; ao passo que digitar (2^3)^2 significava $(2^3)^2 = 8^2 = 64$.

Para garantir resultados corretos em seus cálculos, utilizando ferramentas computacionais, é fundamental escrever corretamente. Isso, aliás, ocorre também quando você escreve no papel: o uso adequado dos parênteses precisa ser respeitado.

Agora é com você!

1. Escreva em seu caderno, em cada caso, o significado da expressão que Paulo digitou, determinando os diferentes resultados, na forma de um número elevado a um expoente:

a) 2^3^3 $2^{3^3} = 2^{27}$ **b)** 2^3^2^3 $2^{3^{2^3}} = 2^{3^8} = 2^{6561}$ **c)** (2^3)^4 $(2^3)^4 = 2^{12}$ **d)** ((3^2)^3)^2 $((3^2)^3)^2 = 3^{12}$

A questão da importância dos parênteses não é totalmente nova. De fato, você já deve ter observado que, por exemplo, $(a + b)^2 \neq a + b^2$.

2. Escreva em seu caderno, em cada caso, como você digitaria as expressões seguintes, observando que, no caso da divisão, o comando para a máquina é "/":

a) $(a + b)^2$ (a + b)^2 **c)** $\dfrac{1}{a + b}$ 1/(a + b) **e)** $\dfrac{a + b}{c + d}$ (a + b)/(c + d)

b) $a + b^2$ a + b^2 **d)** $\dfrac{1}{a} + b$ 1/a + b **f)** $\dfrac{a}{c + d} + b$ a/(c + d) + b

O comando para calcular a raiz quadrada de um número pode ser, dependendo da máquina ou do *software* utilizado, uma simples tecla $\sqrt{\ }$ ou a digitação *sqrt*. Para a raiz cúbica, não existindo a tecla apropriada, você pode digitar o seguinte: (a)^(1/3), significando $\sqrt[3]{a}$; bem como (a)^(1/2), significando $\sqrt{a}$. Dependendo da máquina, não é necessário colocar os parênteses na fração $\dfrac{1}{2}$. Na dúvida, entretanto, é melhor colocá-los.

3. Escreva em seu caderno, em cada caso, como você digitaria as expressões abaixo, observando novamente que, no caso da divisão, o comando para a máquina é "/" e tomando o devido cuidado com o uso dos parênteses:

a) $\sqrt{a + b}$ (a + b)^(1/2) **b)** $a + \sqrt{b}$ a + b^(1/2) **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{a + b}}$ 1/(a + b)^(1/2) **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{a}} + b$ 1/a^(1/2) + b

Pense mais um pouco...

Rafaela possui 30 cubos de aresta medindo $4\sqrt{7}$ cm. Responda em seu caderno.

a) Quantos desses cubos Rafaela deve usar para formar o maior cubo possível? 27 cubos

b) Calcule o volume desse cubo formado. $12.096\sqrt{7}$ cm³

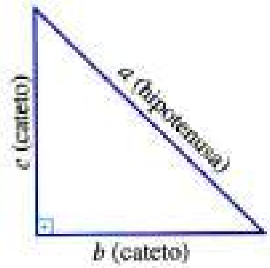
VICENTE MENDONÇA

Representação geométrica de números irracionais expressos por radicais

Já representamos os números racionais por pontos de uma reta (reta numérica). Observe, a seguir, como representar por pontos da reta numérica alguns números irracionais dados por radicais.

Vejamos, por exemplo, a representação de $\sqrt{2}$ na reta numérica. Para isso, trabalharemos com um triângulo retângulo.

Um triângulo retângulo é aquele que tem um ângulo interno reto. Seus lados recebem nomes especiais: catetos e hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto).

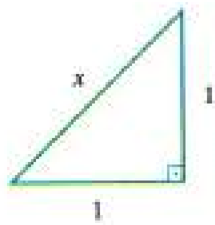


NELSON MATSUDA

Para todo triângulo retângulo, vale a relação (que será estudada com mais detalhes no capítulo 5 deste livro) entre as medidas de seus lados conhecida como teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para representar $\sqrt{2}$ na reta numérica, vamos considerar um triângulo retângulo isósceles de catetos com uma unidade de comprimento e aplicar a relação entre as medidas de seus lados para achar a medida x da hipotenusa desse triângulo.



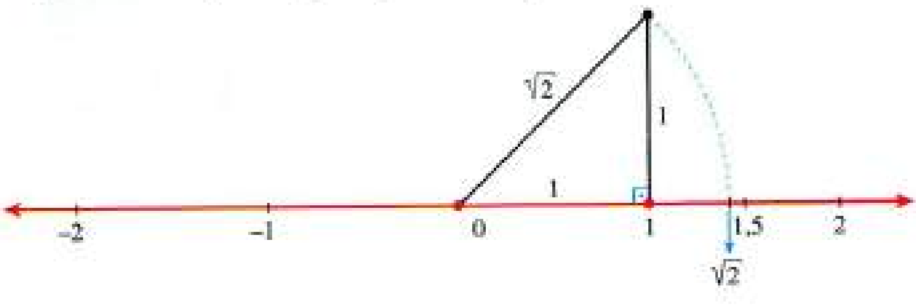
NELSON MATSUDA

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x^2 = 2$$

O valor procurado é um número que, elevado ao quadrado, resulta em 2 e é positivo, pois indica a medida de um segmento. Esse número é $\sqrt{2}$.

Logo, $x = \sqrt{2}$

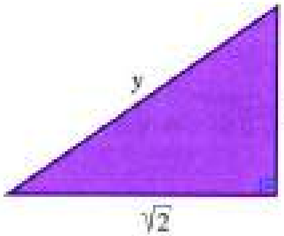
Então, basta construir esse triângulo retângulo isósceles de modo que um de seus catetos seja o segmento que representa o segmento de 0 a 1 na reta numérica. A partir do zero, para a direita, transportamos o segmento que mede $\sqrt{2}$ (hipotenusa) sobre a reta. A extremidade direita desse segmento é o ponto que representa $\sqrt{2}$.



NELSON MATSUDA

Repare que o número $\sqrt{2}$ ficou entre 1 e 2 na reta numérica. Na calculadora você pode obter $\sqrt{2} \simeq 1{,}4142$. Então, $\sqrt{2}$ fica entre o ponto que corresponde a 1 e o ponto médio do segmento que vai de 1 a 2, ou seja, o ponto que corresponde a 1,5.

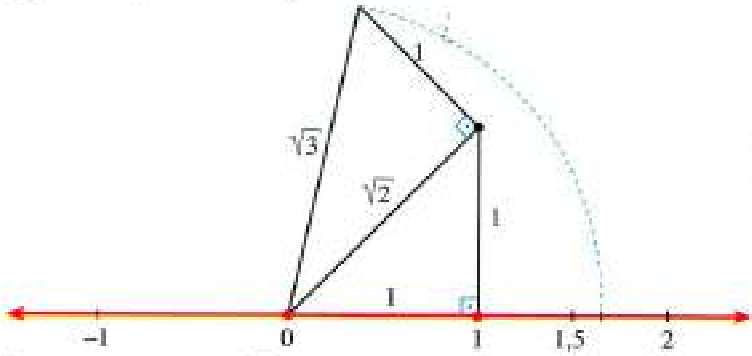
Representemos agora $\sqrt{3}$ na reta numérica. Para isso, basta construir um triângulo retângulo de catetos $\sqrt{2}$ e 1. A hipotenusa medirá $\sqrt{3}$ unidades de comprimento.



$$y^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$$
$$y^2 = 3$$
$$y = \sqrt{3}$$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

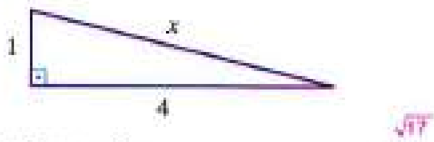
Na reta numérica, aproveitando o segmento que representa $\sqrt{2}$, construímos o segmento que mede $\sqrt{3}$.



Na calculadora, você obtém $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$. Repare que $\sqrt{3}$ fica entre 2 e o ponto médio do segmento que une 1 e 2.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

82 Considere o triângulo retângulo cujas medidas dos lados estão indicadas.



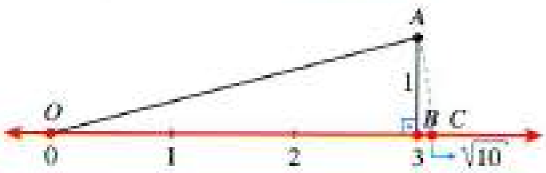
NELSON MATSUDA

a) Determine o número que x representa. $\sqrt{17}$

b) Esse número é racional ou irracional? irracional

c) Represente esse número na forma decimal aproximada, com duas casas decimais, utilizando uma calculadora. 4,12

83 Na figura abaixo, foi representado o número $\sqrt{10}$ na reta numérica. Explique por que essa construção é correta. resposta pessoal

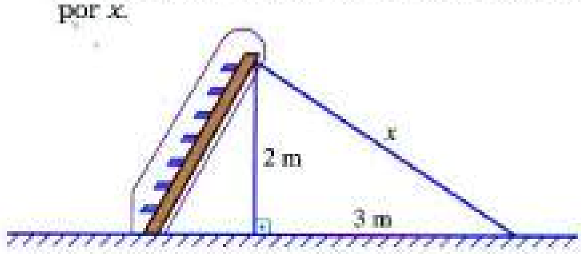


NELSON MATSUDA

84 Com uma régua, desenhe no caderno uma reta numérica e, com auxílio de um compasso, represente nela os números $\sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$.
construção de figura

85 Com auxílio de régua e compasso, no caderno, represente o número $\sqrt{13}$ na reta numérica.
construção de figura

86 O esquema abaixo representa um escorregador cujo comprimento, em metro, foi indicado por x.



NELSON MATSUDA

Responda no caderno.

a) Qual é o número irracional que representa o comprimento desse escorregador? $\sqrt{13}$

b) Qual é o comprimento aproximado desse escorregador em centímetro? 360 cm

87 Em seu caderno, com auxílio de régua e compasso, trace um segmento de $\sqrt{20}\ u$ e outro de $\sqrt{27}\ u$, sendo $u = 2$ cm. Construa um retângulo que tenha essas medidas e determine sua área. Construa um outro retângulo que tenha por medidas $2\sqrt{5}\ u$ e $3\sqrt{3}\ u$ e encontre sua área. Compare os resultados encontrados.
Construção de figura; os dois têm mesma área.

8. Radiciação com radicais

Observe:

$$\bullet\ \underbrace{\sqrt[5]{\sqrt[3]{6^2}} = \sqrt[5]{6^{\frac{2}{3}}} = 6^{\frac{\frac{2}{3}}{5}} = 6^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{6^2}}_{5\times 3}$$

$$\bullet\ \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{7^5}}} = \sqrt[3]{\sqrt{7^{\frac{5}{4}}}} = \sqrt[3]{7^{\frac{\frac{5}{4}}{2}}} = \sqrt[3]{7^{\frac{5}{8}}} = 7^{\frac{\frac{5}{8}}{3}} = 7^{\frac{5}{24}} = \sqrt[24]{7^5}}_{3\times 2\times 4}$$

Para extrair a raiz de um radical, devemos multiplicar os índices desses radicais e conservar o radicando, simplificando o radical obtido sempre que possível (considerando o radicando um número real positivo e os índices números naturais não nulos).

Veja alguns exemplos:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[2\cdot 3]{7} = \sqrt[6]{7}$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{5^2}}} = \sqrt[2\cdot 3\cdot 2]{5^2} = \sqrt[12]{5^2} = \sqrt[6]{5}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{2\sqrt[3]{5}}} = \sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 5}}} = \sqrt[4\cdot 2\cdot 3]{8\cdot 5} = \sqrt[24]{40}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

88 Em seu caderno, reduza a um único radical e em seguida simplifique, se possível.

a) $\sqrt{\sqrt{10}}$ $\sqrt[4]{10}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{3}}$ $\sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ $\sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}$ $\sqrt[18]{3}$

e) $\sqrt[6]{\sqrt{5^3}}$ $\sqrt[4]{5}$

f) $\sqrt[3]{2\sqrt{2^4}}$ 2

g) $\sqrt{\sqrt{15^4}}$ 15

h) $\sqrt[4]{3\sqrt{5}}$ $\sqrt[8]{45}$

89 Verifique no caderno, qual das sentenças a seguir é falsa.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{11}} = \sqrt[6]{11}$ V

b) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$ F

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{1.024}}} = \sqrt[4]{2^5}$ V

d) $\sqrt[3]{\sqrt{81}} = \sqrt[3]{3^2}$ V

9. Racionalização de denominadores

Considere o quociente de 2 por $\sqrt{3}$. Ele pode ser indicado por $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Um quociente não se altera quando multiplicamos o dividendo e o divisor por um mesmo número não nulo. Veja o que acontece quando multiplicamos os dois termos da expressão $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ por $\sqrt{3}$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Obtemos uma expressão com denominador racional. A esse procedimento chamamos de **racionalização de denominadores**.

É mais fácil efetuar cálculos com radicais quando eles não estão no denominador. Por isso, quando necessário, racionalizamos o denominador de uma expressão fracionária.

Veja outros exemplos a seguir.

a) Racionalizaremos o denominador da expressão $\frac{2}{3\sqrt{2}}$.

Multiplicando os dois termos dessa expressão por $\sqrt{2}$, temos:

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

b) Racionalizaremos o denominador da expressão $\frac{2}{\sqrt[5]{7^2}}$.

Para multiplicar os dois termos da expressão, convém escolher um número que multiplicado por $\sqrt[5]{7^2}$ resulte em $\sqrt[5]{7^5}$, isto é, em 7. Esse número é o quociente $\sqrt[5]{7^5} : \sqrt[5]{7^2} = \sqrt[5]{7^3}$.

Logo, multiplicando os dois termos da expressão por $\sqrt[5]{7^3}$, temos:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2}\cdot\sqrt[5]{7^3}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2\cdot 7^3}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{2\sqrt[5]{7^3}}{7}$$

c) Racionalizaremos o denominador da expressão $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

Neste caso convém aplicar o produto notável: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Multiplicando os dois termos da expressão por $\sqrt{7}+\sqrt{3}$, temos:

$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{7-3} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\cancel{4}_{2}} = \frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{2}$$

d) Simplificaremos a expressão abaixo.

$$\frac{2}{\sqrt{7}+2} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{7}-2\right)-\sqrt{7}\cdot\left(\sqrt{7}+2\right)}{\left(\sqrt{7}+2\right)\cdot\left(\sqrt{7}-2\right)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{7}-4-7-2\sqrt{7}}{7-2\sqrt{7}+2\sqrt{7}-4} = \frac{-11}{7-4} = -\frac{11}{3}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

90 Qual é o número pelo qual devemos multiplicar os dois termos da expressão $\dfrac{15}{4\sqrt{3}}$ para obter uma expressão que tenha no denominador um número racional? $\sqrt{3}$

91 Para racionalizar o denominador da expressão $\dfrac{10}{\sqrt[3]{5}}$, devemos multiplicar seus dois termos por qual radical? $\sqrt[3]{5^2}$

92 Racionalize, em seu caderno, o denominador das expressões:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ $2\sqrt{3}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$ $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$

d) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{5}}$ $\sqrt[3]{5^2}$

f) $\dfrac{4}{\sqrt[8]{2^5}}$ $2\sqrt[8]{2^3}$

93 (FCC-BA) Simplificando a expressão $\sqrt{\dfrac{9}{2}} - \sqrt{\dfrac{2}{9}}$, obtemos: alternativa b

a) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{7\sqrt{2}}{6}$

c) $\dfrac{7\sqrt{2}}{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{18}$

94 Sabendo que $\sqrt{5}$ com três casas decimais é 2,236, calcule o quociente $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

a) substituindo $\sqrt{5}$ por 2,236; 1,341

b) racionalizando o denominador e depois substituindo $\sqrt{5}$ por 2,236. 1,341

95 Sabendo que $\sqrt{10}$ com três casas decimais é 3,162, calcule da maneira mais conveniente o quociente $\dfrac{2}{\sqrt{10}-3}$. 12,324

96 Simplifique, em seu caderno, as expressões:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{1}{3+\sqrt{2}} - \dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$ $\dfrac{-2\sqrt{2}}{7}$

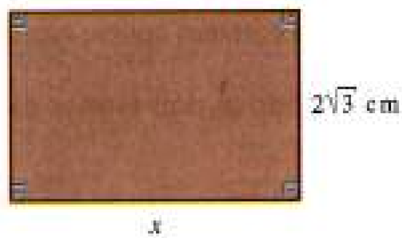
c) $\dfrac{\sqrt{6+\sqrt{11}} \cdot \sqrt{6-\sqrt{11}}}{\sqrt{6}-1}$ $\sqrt{6}+1$

d) $\dfrac{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2 - 4\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ $\sqrt{13}$

97 Calcule a medida x nos retângulos de cada item.

a) área = 10 cm² $x = \sqrt{2}$ cm

b) área = 18 cm² $x = 3\sqrt{3}$ cm

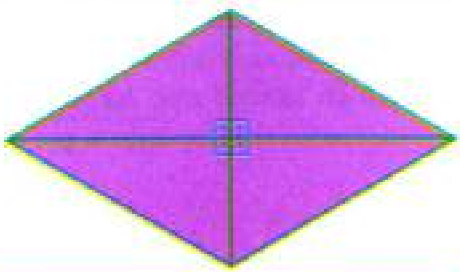


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

98 Demonstre, em seu caderno, que o inverso de $\sqrt{2} - 1$ é $\sqrt{2} + 1$. resposta pessoal

Pense mais um pouco...

Certa lajota é formada por 4 triângulos retângulos dos quais um dos catetos mede $2\sqrt{5}$ cm. Qual deve ser a medida do outro cateto para que essa lajota tenha área de 60 cm²? $3\sqrt{5}$ cm



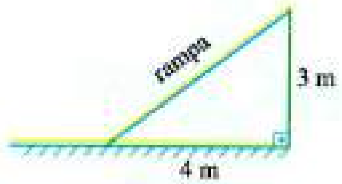
NELSON MATSUDA

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

99 Em seu caderno, calcule o valor da expressão:

$$\sqrt{\frac{81}{4}} - \sqrt{400} + \sqrt{2{,}25} \quad -14$$

100 Para chegar a sua casa, João precisa subir uma rampa, conforme o esquema abaixo.

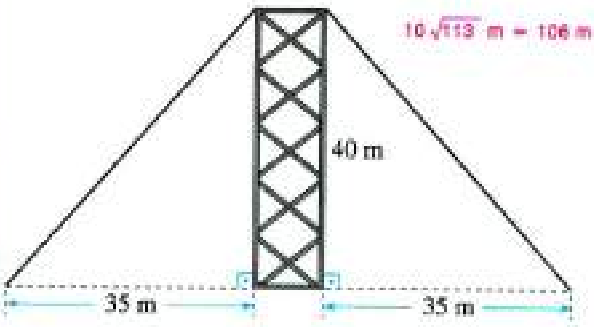


Calcule, no caderno, o comprimento dessa rampa. 5 m

101 Com auxílio de régua e compasso, represente o número $\sqrt{17}$ na reta numérica. construção de figura

102 Uma torre de 40 metros de altura é sustentada por dois cabos de aço que estão a 35 metros da base da torre, conforme mostra a figura abaixo. Em seu caderno, responda: quantos metros de cabo de aço foram necessários para essa sustentação?

$10\sqrt{113}$ m ≃ 106 m



103 Simplifique os radicais.

a) $\sqrt[7]{2^7}$ 2

b) $\sqrt[20]{(-2)^{10}}$ $\sqrt{2}$

c) $\sqrt[18]{3^6}$ $\sqrt[3]{3}$

d) $\sqrt[10]{64}$ $\sqrt[5]{2^3}$

104 Expresse cada radical na forma $a \cdot \sqrt{b}$, com a e b inteiros.

a) $\sqrt{27}$ $3\sqrt{3}$

b) $\sqrt{40}$ $2\sqrt{10}$

c) $\sqrt{72}$ $6\sqrt{2}$

d) $\sqrt{120}$ $2\sqrt{30}$

e) $\sqrt{250}$ $5\sqrt{10}$

f) $\sqrt{512}$ $16\sqrt{2}$

105 Henrique traçou uma reta numérica e nela assinalou o ponto A de abscissa $\sqrt{18}$ cm. Sendo O o ponto de origem, transportou para uma folha de cartolina o segmento $\overline{OA}$. Planificou e construiu um cubo tendo essa medida como aresta. Qual é o volume do cubo construído? $18\sqrt{18}$ cm³ ou $54\sqrt{2}$ cm³

106 Considere o paralelepípedo abaixo.

Determine em seu caderno:

a) a soma das medidas de todas as arestas do paralelepípedo; $(12 + 12\sqrt{2})$ cm

b) a soma das áreas das faces laterais; $(6\sqrt{2} + 8)$ cm²

c) o volume desse paralelepípedo. $(4\sqrt{2} + 6)$ cm³

107 O passo de um robô mede exatamente $50\sqrt{3}$ cm. Responda no caderno quantos passos ele deverá dar para percorrer $18{,}5\sqrt{3}$. 37 passos

108 Racionalize o denominador das expressões:

a) $\dfrac{8}{\sqrt{2}}$ $4\sqrt{2}$

b) $\dfrac{10}{\sqrt{3} - 1}$ $5(\sqrt{3} + 1)$

c) $\dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ $\sqrt{5} + 3$

109 A expressão $\dfrac{26 \cdot \sqrt{146}}{100}$ foi usada por volta de 1800 como um valor aproximado do número π. Usando uma calculadora simples, verifique até que casa decimal a expressão dada coincide com o valor de π conhecido atualmente: $\pi = 3{,}1415927...$

A expressão dada coincide com o valor de π até a 5ª casa decimal.

110 Calcule no caderno.

(PUC-Campinas-SP) Efetuando-se

$$\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}},$$ obtém-se: alternativa b

a) $-\dfrac{22}{5}$

b) $-\dfrac{8\sqrt{6}}{5}$

c) 0

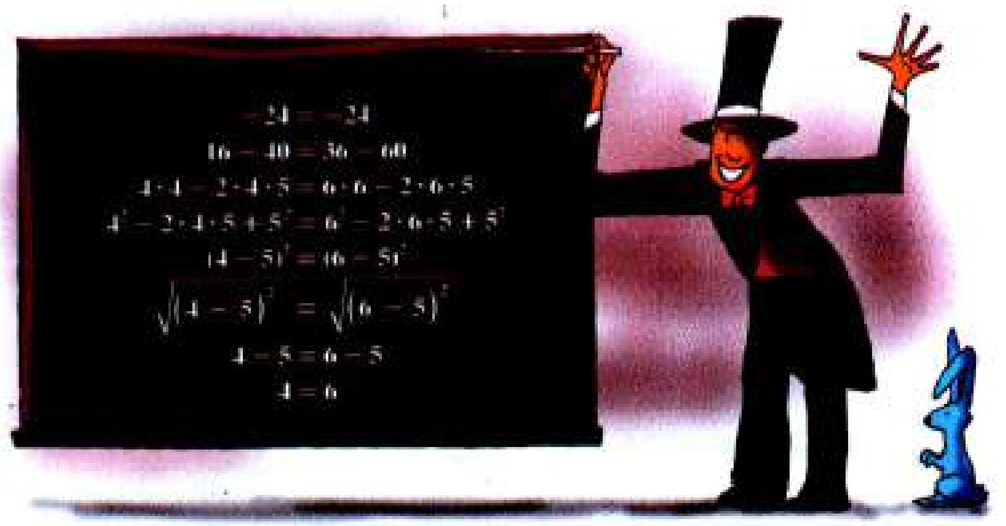
d) $-4\sqrt{6} + 11$

e) $-\dfrac{2(4\sqrt{6} + 11)}{5}$

DIVERSIFICANDO

Um truque de mágica

Em um espetáculo, o grande mágico Rafael deixou para sua última apresentação a mágica dos números. O truque consiste em mostrar que 4 é igual a 6. Veja como o mágico fez os cálculos.



VICENTE MENDONÇA

■ Com o auxílio da ilustração acima, responda às questões no caderno.

Espera-se que os alunos percebam que, na terceira linha, Rafael escreve os mesmos números da segunda linha, mas fatorados. Depois de somar 5^2 a ambos os membros dessa igualdade, ele obtém o quadrado da diferença de dois termos.

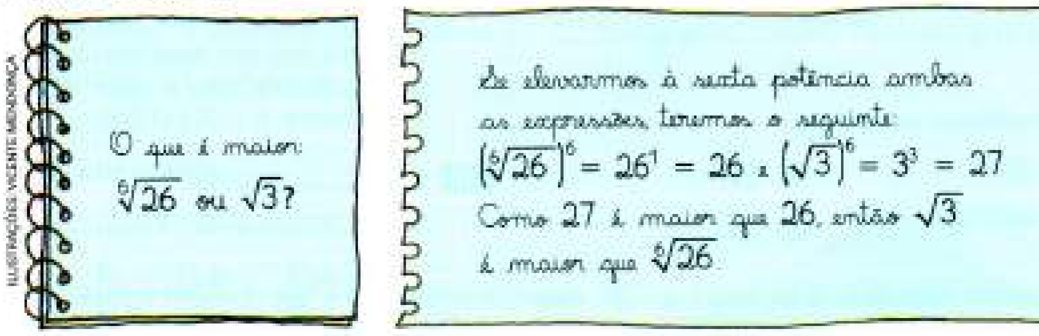
1. Formem grupos de 3 a 4 pessoas, discutam os cálculos feitos pelo mágico Rafael e expliquem cada passagem que foi realizada na conta acima.

2. Qual foi o erro cometido no cálculo?

Espera-se que os alunos percebam que o erro do cálculo está na passagem da sexta para a sétima linha, pois a raiz quadrada de um número elevado ao quadrado é igual ao módulo desse número. Assim teríamos a seguinte igualdade: $|4 - 5| = |6 - 5|$, logo: $|-1| = |1|$ e, portanto, $1 = 1$, e não $4 = 6$.

O que é maior?

Tiago, ao arrumar o quarto, encontrou o caderno de Matemática do seu irmão. Lá, ele viu um exercício que não estava resolvido. Veja o exercício no caderno a seguir e a resolução de Tiago.



ILUSTRAÇÕES: VICENTE MENDONÇA

1. Aplicando o que você acabou de ler, responda no caderno o que é maior.

   a) $\sqrt[3]{3}$ ou $\sqrt[4]{4}$ *$\left(\sqrt[3]{3}\right)^{12} = 3^4 = 81$ e $\left(\sqrt[4]{4}\right)^{12} = 4^3 = 64$, como $81 > 64$, será $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$.*

   b) $\sqrt[4]{4}$ ou $\sqrt{2}$ *$\left(\sqrt[4]{4}\right)^4 = 4$ e $\left(\sqrt{2}\right)^4 = 2^2 = 4$, como $4 = 4$, será $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.*

CAPÍTULO

2 Proporcionalidade e semelhança em Geometria

1. Razão entre dois segmentos

Vamos rever o conceito de razão entre duas medidas considerando a situação a seguir.

Para atravessar um viaduto, Marcelo deu 150 passos, enquanto Márcio deu 180.

DELFIM MARTINS/PULSAR

O viaduto Santa Ifigênia, em São Paulo, com estrutura metálica moldada na Bélgica, foi inaugurado em 1913. (Foto de 2002).

A razão entre o número de passos de Marcelo e o número de passos de Márcio é dada por:

$$\frac{150}{180} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

Isso significa que 5 passos de Marcelo equivalem a 6 passos de Márcio.

Admitindo que Marcelo tenha 1,80 m de altura e Márcio, 1,71 m, a razão entre suas alturas é:

$$\frac{\text{altura de Marcelo}}{\text{altura de Márcio}} = \frac{1{,}80\text{ m}}{1{,}71\text{ m}} = \frac{180}{171} = \frac{20}{19}$$

JOSÉ LUIS JUHAS

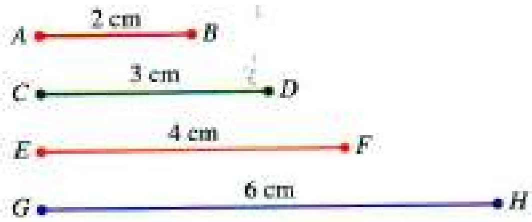
A razão entre dois segmentos é a razão entre suas medidas tomada em uma mesma unidade.

Observe os segmentos:

NELSON MATSUDA

A razão entre eles é: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{4\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \dfrac{4}{5}$

Consideremos agora os segmentos $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}, \overline{GH}$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

A razão entre os dois primeiros é: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{2}{3}$

A razão entre os dois últimos é: $\dfrac{EF}{GH} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Como as razões são iguais, $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$ e $\overline{GH}$, nessa ordem, são proporcionais, isto é:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} \text{ ou } \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

A proporcionalidade entre segmentos é muito usada em Geometria e na vida prática. Por exemplo, para fazer ampliação de uma fotografia, é necessário que os lados da foto ampliada sejam, respectivamente, proporcionais aos lados da foto inicial.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Observe a figura:

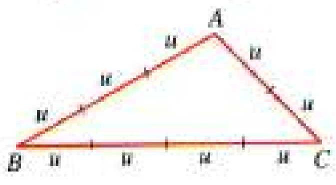
NELSON MATSUDA

Considerando as medidas indicadas, determine, em seu caderno, a razão entre:

a) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ $\frac{3}{4}$
b) $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ $\frac{13}{21}$
c) $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$ $\frac{2}{5}$
d) $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ $\frac{1}{3}$

2 No triângulo abaixo, determine, em seu caderno, a razão entre:

a) $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ $\frac{3}{4}$ **b)** $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ $\frac{2}{3}$ **c)** $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ $\frac{4}{3}$



NELSON MATSUDA

3 Sendo $\overline{AB}$ um segmento de medida x, calcule essa medida, em seu caderno, nos seguintes casos:

a) $\dfrac{AB}{5} = \dfrac{14}{10}$ 7
b) $\dfrac{3,4}{AB} = \dfrac{12}{18}$ 5,1
c) $\dfrac{0,9}{0,5} = \dfrac{AB}{3,5}$ 6,3
d) $\dfrac{2,4}{3,2} = \dfrac{1,5}{AB}$ 2

4 Os segmentos $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$ e $\overline{GH}$ formam, nessa ordem, uma proporção. Sendo $AB = 15$ cm, $CD = 10$ cm e $EF = 12$ cm, calcule, em seu caderno, a medida de $\overline{GH}$. 8 cm

5 Os segmentos $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{MN}$ e $\overline{PQ}$, nessa ordem, são proporcionais. Calcule a medida de $\overline{MN}$, em seu caderno, sabendo que $AB = 6$ cm, $CD = 14$ cm e $PQ = 21$ cm. 9 cm

6 Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{MN}$, $\overline{CD}$ e $\overline{PQ}$ formam, nessa ordem, uma proporção. Calcule, em seu caderno, a medida de $\overline{CD}$ e $\overline{PQ}$, sabendo que $AB = 12$ cm, $MN = 15$ cm e $CD + PQ = 45$ cm. $CD = 20$ cm; $PQ = 25$ cm

7 Resolva a questão em seu caderno.
(PUC-MG) Se o ponto M divide um segmento $\overline{AB}$, 18 cm, na razão $\frac{2}{7}$, as medidas de $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são, respectivamente, em cm: alternativa a

a) 4 e 14
b) 7 e 11
c) 8 e 10
d) 10 e 8
e) 14 e 4

8 Um quadrilátero $ABCD$ tem 63 cm de perímetro. As medidas dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ formam, nessa ordem, uma proporção. Se $AB = 12$ cm e $BC = 15$ cm, quais são as medidas dos outros dois lados desse quadrilátero? $CD = 16$ cm e $AD = 20$ cm

9 Considere um triângulo ABC cujo lado $\overline{AB}$ meça 20 cm e a altura $\overline{CH}$ relativa a esse lado meça 18 cm. Considere agora um triângulo MNP cujo lado $\overline{MN}$ meça 30 cm e a altura $\overline{PG}$ relativa a esse lado meça x cm.

Sabendo que $\frac{AB}{MN} = \frac{CH}{PG}$, determine, em seu caderno:

a) o valor de x 27 cm
b) a área do triângulo MNP 405 cm²

10 Uma foto foi revelada no tamanho 10×15 (lemos 10 por 15), ou seja, um lado mede 10 cm e o outro 15 cm. Para ampliá-la de modo que o lado menor tenha 13 cm, calcule, em seu caderno, a medida do outro lado. 19,5 cm

ANDY SACKS/STONE-GETTY IMAGES

11 Hélio possui um terreno retangular para criação de ovelhas, cujas dimensões estão na razão 2 : 3. O perímetro desse terreno mede 1.500 m. Responda em seu caderno.

a) Quais são as dimensões desse terreno? 300 m e 450 m
b) Qual é a área desse terreno? 135.000 m²

PARA SABER mais

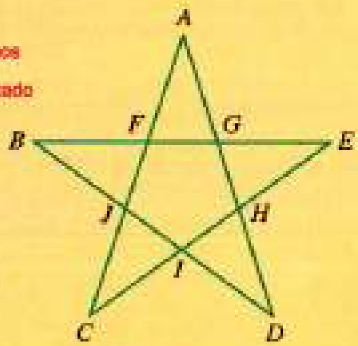
Uma razão de ouro

Estudando o pentágono regular estrelado, os gregos, mais de 500 anos antes de Cristo, descobriram um número irracional determinado por razões entre segmentos desse pentágono. Cerca de 2.000 anos depois, esse número passou a ser chamado de **número áureo** ou **número de ouro**.

Na figura ao lado, por exemplo, temos:

$$\frac{AC}{AJ} = \frac{AJ}{AF} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \simeq 1{,}618$$

Se achar conveniente, explicar aos alunos que o número de ouro $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ é indicado pela letra grega Φ (lê-se fi). Esse número é formado por infinitas casas decimais, sem período.

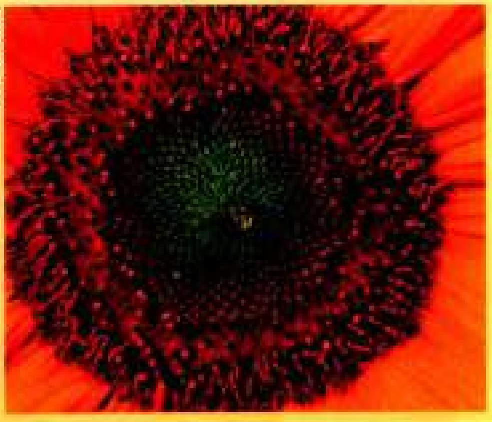


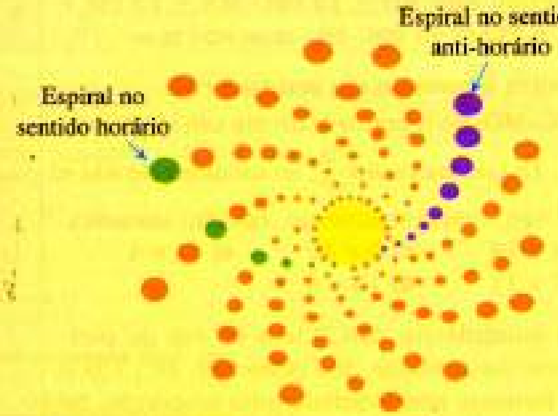
NELSON MATSUDA

O número de ouro aparece em várias situações: na natureza, na arquitetura, em razões entre medidas do corpo humano etc. Veja o exemplo do girassol.

A estrutura central do girassol é formada por um grande número de pequenas sementes dispostas em espirais, algumas no sentido horário, e outras, no anti-horário.

PAULATRISTOCK





NELSON MATSUDA

$$\frac{\text{número de espirais no sentido horário}}{\text{número de espirais no sentindo anti-horário}} \simeq 1,6$$

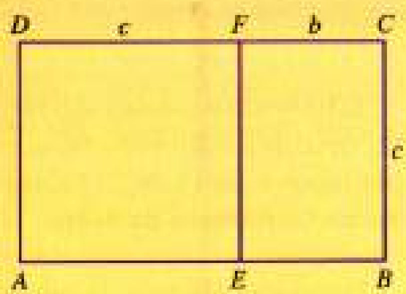
Retângulo áureo ou **retângulo de ouro** é todo retângulo cuja razão entre os lados maior e menor é o número de ouro ($\simeq 1,618$).

PHOTODISC/GETTY IMAGES

A fachada do Partenon (templo da deusa Atena, da mitologia grega, construído em Atenas no século V a.C.) pode ser inscrita em um retângulo cujas medidas aproximam-se das de um retângulo áureo.

$$\frac{\text{medida da largura}}{\text{medida da altura}} = \frac{6,5}{4,0} = 1,6$$

Para todo retângulo áureo, vale a seguinte propriedade: se dele retirarmos o maior quadrado possível, o retângulo restante também será um retângulo áureo, isto é, a proporção entre os lados se manterá.



NELSON MATSUDA

Do retângulo $ABCD$ retiramos o quadrado $AEFD$ (maior possível). Obtemos o retângulo $EBCF$ de modo que:

$$\frac{\text{medida da largura}}{\text{medida da altura}} = \frac{c+b}{c} = \frac{c}{b}$$

Fazendo $c = 1$ em $\frac{c+b}{c} = \frac{c}{b}$, temos: $\frac{1+b}{1} = \frac{1}{b}$ ou $b^2 + b - 1 = 0$.

Esta é uma equação do 2º grau cuja resolução será vista no capítulo 4.

Resolvendo a equação, obtemos $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ como um dos valores de b, logo

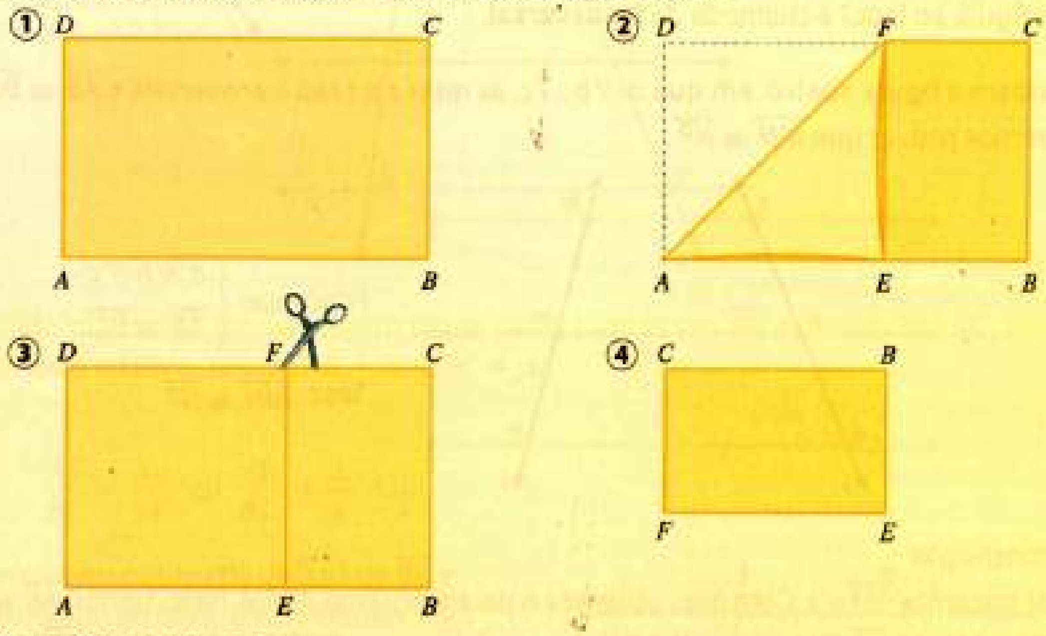
$$\frac{1}{b} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \simeq 1,618$$

Agora é com você!

Construa retângulos áureos de duas maneiras.

Com dobradura:

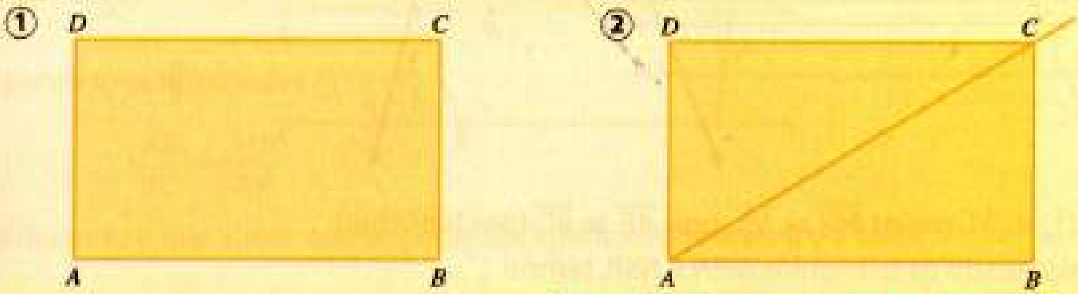
- Decalque em uma folha em branco o retângulo *ABCD*.
- Recorte o retângulo e, com dobradura, encontre o quadrado *AEFD* (veja as figuras a seguir).
- Recorte o quadrado e encontre um novo retângulo áureo.

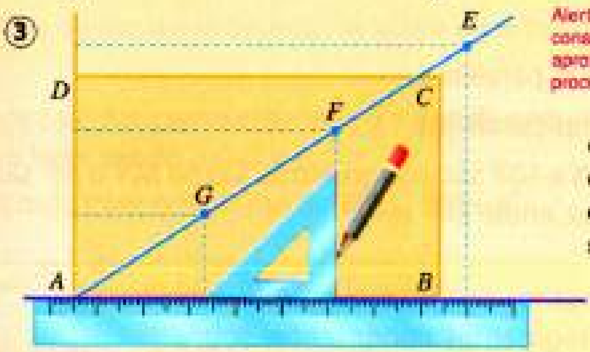


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Com régua e esquadro:

- Decalque em uma folha em branco o retângulo *ABCD*.
- Trace, com o auxílio de uma régua, uma semirreta com origem em *A* e que passe por *C*. $\overline{AC}$ é uma diagonal do retângulo.
- Com o auxílio de um esquadro, trace retas perpendiculares ao lado $\overline{AB}$ (ou à reta-suporte) e determine outros retângulos áureos (veja as figuras abaixo).





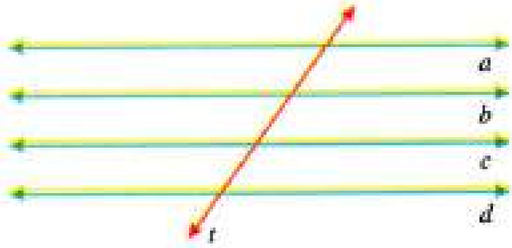
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Alertar os alunos de que estas construções, como qualquer construção, sempre terão uma certa imprecisão e o cálculo será aproximado. O que se pode fazer para minimizar esse problema é procurar caprichar nas figuras.

Utilizando os retângulos áureos que construiu, descubra se uma folha de papel de formato A4 (21 cm por 29,7 cm) e uma de formato carta (21,59 cm por 27,94 cm) são retângulos áureos.

Não são retângulos áureos.

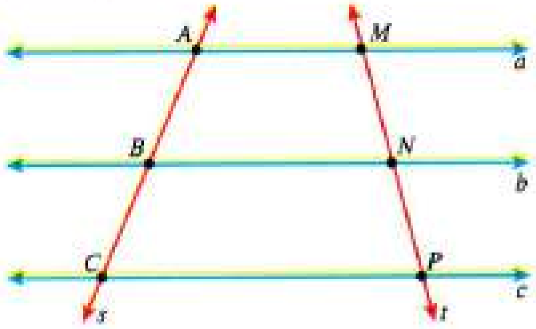
2. Feixe de paralelas



Um conjunto de três ou mais retas paralelas de um plano (como as retas *a*, *b*, *c* e *d* da figura ao lado) chama-se **feixe de paralelas**.

Uma reta que corta um feixe de paralelas (como a reta *t* da figura ao lado) é chamada de **transversal**.

Considere a figura abaixo, em que $a \parallel b \parallel c$, as retas *s* e *t* são transversais e $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Queremos provar que $\overline{MN} \cong \overline{NP}$.



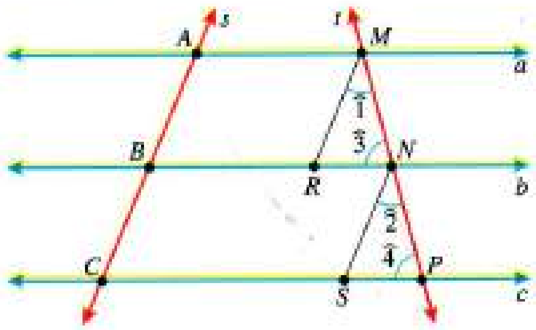
Hipótese: $\begin{cases} a \parallel b \parallel c \\ \overline{AB} \cong \overline{BC} \end{cases}$

Tese: $\overline{MN} \cong \overline{NP}$

Demonstração

Por *M* traçamos $\overline{MR} \parallel s$. Com isso, obtemos o paralelogramo *ABRM*. Nele, temos: $\overline{AB} \cong \overline{MR}$ ①

Por *N* traçamos $\overline{NS} \parallel s$. Assim, obtemos o paralelogramo *BCSN*. Nele, temos: $\overline{BC} \cong \overline{NS}$ ②



De ① e ②, temos $\overline{MR} \cong \overline{NS}$, pois $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (por hipótese).

Comparando os triângulos *MRN* e *NSP*, temos:

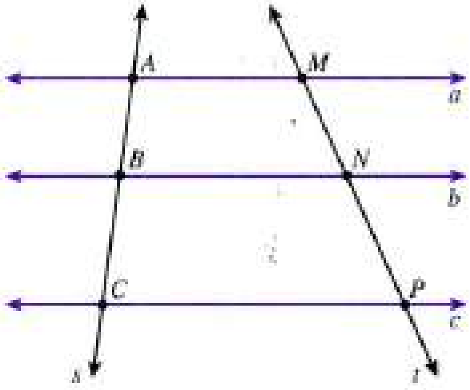
- $\overline{MR} \cong \overline{NS}$ (já provado)
- $\hat{1} \cong \hat{2}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)
- $\hat{3} \cong \hat{4}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

Logo, pelo caso L.A.A$_o$., os triângulos *MRN* e *NSP* são congruentes. Como $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ são lados correspondentes em triângulos congruentes, então $\overline{MN} \cong \overline{NP}$.

Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então esse feixe determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

3. Teorema de Tales

Considere a figura abaixo, em que $a \parallel b \parallel c$ e as retas s e t são transversais.

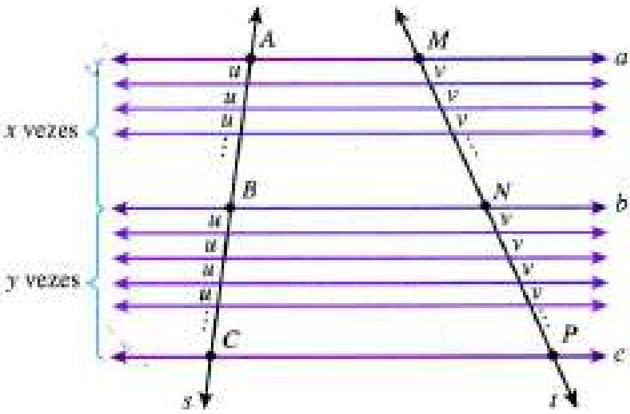


Admitindo que exista um segmento u que caiba x vezes em $\overline{AB}$ e y vezes em $\overline{BC}$, com x e y sendo números inteiros, temos: $AB = xu$ e $BC = yu$.

Logo:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{xu}{yu} \text{ ou } \frac{AB}{BC} = \frac{x}{y} \quad ①$$

Traçando pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ retas paralelas ao feixe, elas dividirão $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ em segmentos congruentes.



Indicando por v a medida desses segmentos, temos $MN = xv$ e $NP = yv$ e, portanto:

$$\frac{MN}{NP} = \frac{xv}{yv} \text{ ou } \frac{MN}{NP} = \frac{x}{y} \quad ②$$

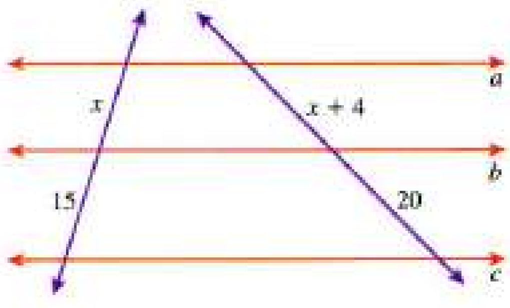
Comparando as igualdades ① e ②:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

Considerando o que vimos acima, podemos enunciar o **teorema de Tales**:

Um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais.

Vamos calcular, como exemplo, o valor de x na figura ao lado, sendo $a \parallel b \parallel c$.



De acordo com o teorema de Tales, temos:

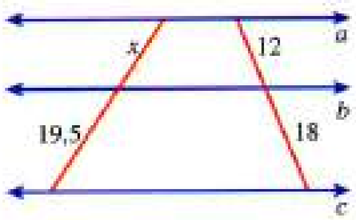
$\frac{x}{15} = \frac{x+4}{20}$, ou seja, $20x = 15(x + 4)$

Resolvendo a equação, encontramos: $x = 12$

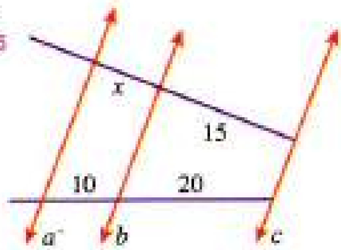
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12 Sendo $a \parallel b \parallel c$, calcule o valor de x em cada item, em seu caderno.

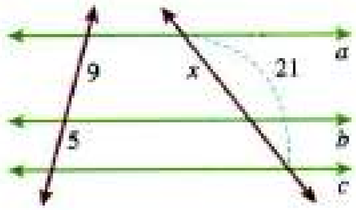
a) $x = 13$



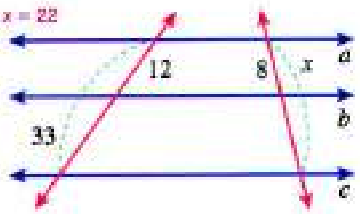
b) $x = 7{,}5$



c) $x = 13{,}5$



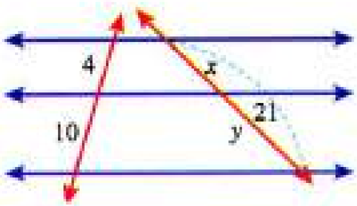
d) $x = 22$



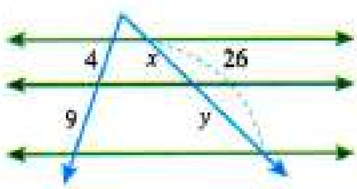
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

13 Determine em seu caderno os valores de x e de y nos seguintes feixes de paralelas:

a) $x = 6$
$y = 15$



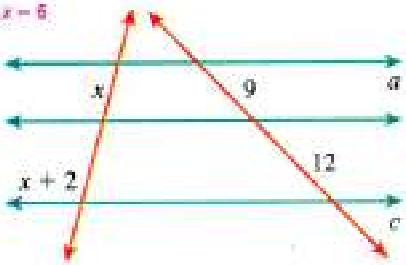
b) $x = 8$
$y = 18$



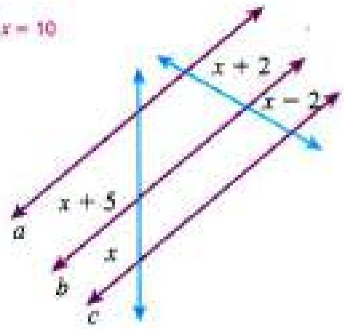
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

14 Sendo $a \parallel b \parallel c$, calcule x aplicando o teorema de Tales, em seu caderno.

a) $x = 6$



b) $x = 10$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

15 Três retas paralelas determinam sobre uma transversal segmentos de 4,2 cm e 5,4 cm. Calcule a medida do maior segmento que o feixe determina sobre outra transversal, sabendo que o segmento menor mede 6,3 cm. 14,4 cm

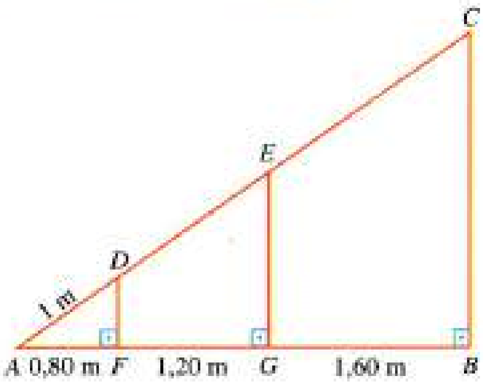
16 Na planta abaixo, as ruas Colibri, Pardal e Canário são paralelas.

NELSON MATSUDA

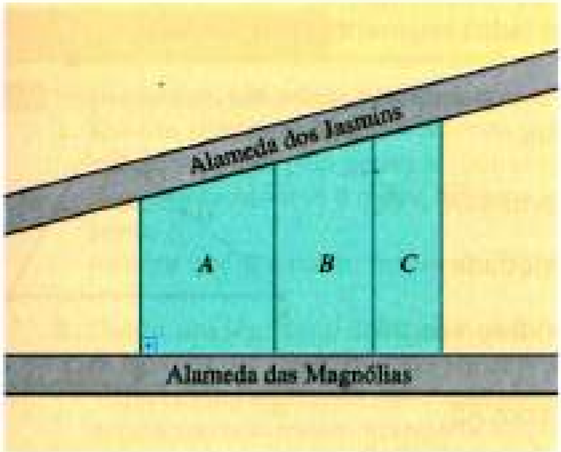
a) Determine em seu caderno as distâncias x e y. $x = 80$ m e $y = 100$ m

b) Considere os quarteirões ① e ②. Estime o comprimento da parte da rua Canário que forma o quarteirão ① sabendo que a parte da rua Colibri que forma o quarteirão ② mede 45 m. 60 m

17 Determine, em seu caderno, a medida do lado $\overline{AC}$ no triângulo abaixo. 4,6 m



18 A figura abaixo representa um terreno com frente para duas alamedas. A frente para a alameda das Magnólias tem 90 m, e a frente para a alameda dos Jasmins, 135 m.



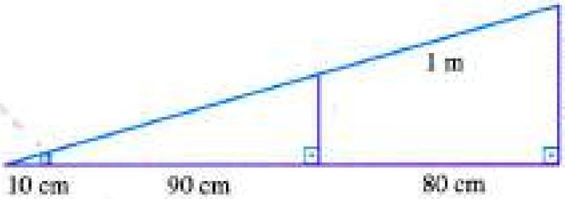
O proprietário do terreno resolveu dividi-lo em três lotes menores, traçando duas paralelas aos lados do terreno, perpendiculares à Alameda das Magnólias. O terreno *A* ficou com 40 m de frente para essa alameda, e o terreno *B*, com 30 m de frente para a mesma alameda. Responda no caderno:

a) Qual é a metragem da frente do terreno *C* para a Alameda das Magnólias? 20 m

b) Qual é a metragem das frentes dos três terrenos para a Alameda dos Jasmins? terreno *A*: 60 m; terreno *B*: 45 m; terreno *C*: 30 m

19 O proprietário de uma loja, preocupado em oferecer a seus fregueses uma opção de acesso mais seguro e confortável, vai substituir os degraus da escada da entrada da loja por uma rampa.

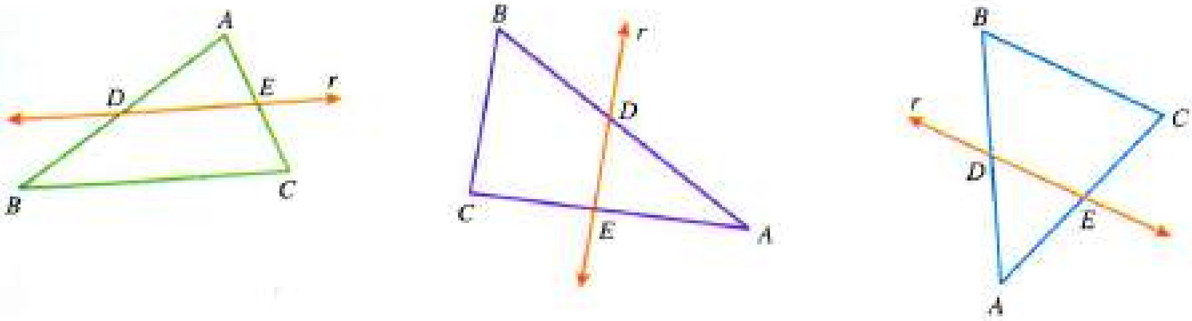
Para a construção dessa rampa, deverão ser instaladas vigas de sustentação, uma a 80 cm da entrada da loja, outra a 90 cm da primeira, e outra a 10 cm desta última. Observando o esboço feito pelo dono da loja, determine, em seu caderno, o comprimento em metros da rampa que está destacada com azul. 2,25 m



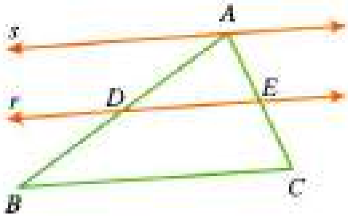
Consequências do teorema de Tales

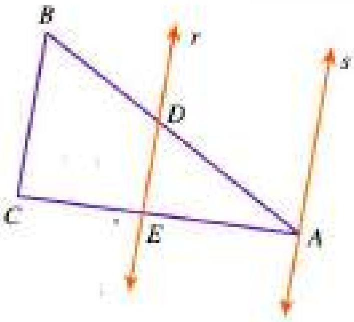
1ª consequência

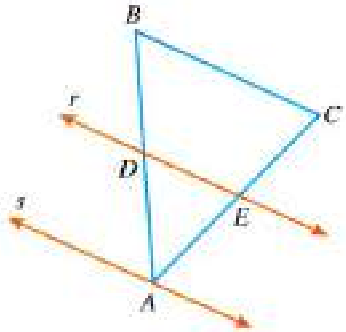
Observe os triângulos *ABC* e os traçados de uma reta *r* paralela a um de seus lados:



Em todos eles, podemos considerar uma outra reta s paralela a r:







ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Pelo teorema de Tales, temos, em todos eles:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

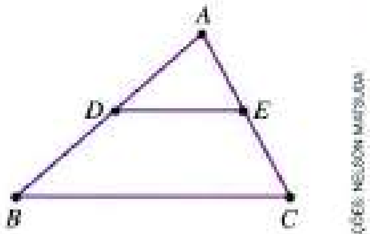
Podemos expressar essa consequência do teorema de Tales do seguinte modo:

Quando uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros lados em dois pontos distintos, ela determina sobre esses lados segmentos proporcionais.

A recíproca desse teorema também é verdadeira.

Se no triângulo ABC vale a relação $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, então $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Vejamos um exemplo de aplicação dessa propriedade.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

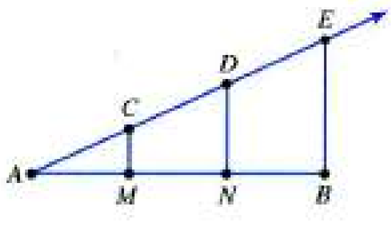
Considere o segmento $\overline{AB}$ ao lado. Vamos dividi-lo em três partes iguais.

Pelo ponto A traçamos uma semirreta oblíqua com $\overline{AB}$.

Sobre essa semirreta, a partir de A, marcam-se 3 pontos, C, D e E, de modo que $AC = CD = DE$ e traça-se o segmento $\overline{BE}$.

Pelos pontos C e D, com o auxílio de régua e esquadro, traçam-se paralelas a $\overline{BE}$.

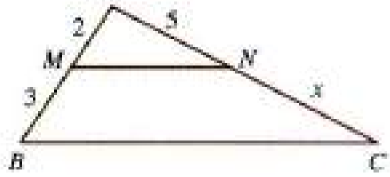
Como $AC = CD = DE$, então $AM = MN = NB$.



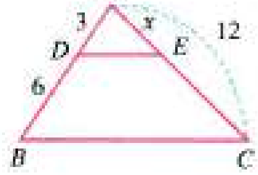
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

20 Calcule, em seu caderno, o valor de x nas seguintes figuras:

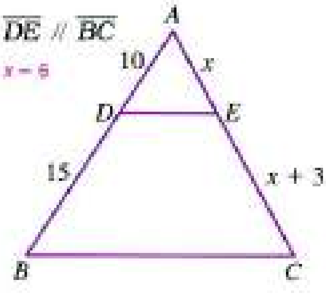
a) $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ $x = \frac{15}{2}$



b) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ $x = 4$



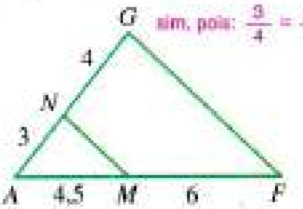
c) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ $x = 6$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

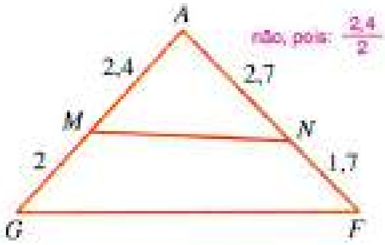
21 Verifique, em cada caso, se o segmento $\overline{NM}$ é paralelo ao lado $\overline{GF}$ do triângulo. Justifique a resposta em seu caderno.

a)



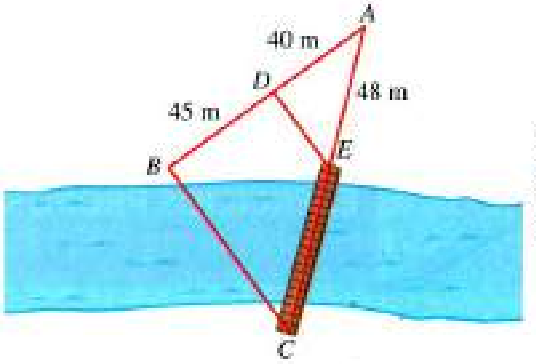
sim, pois: $\frac{3}{4} = \frac{4,5}{6}$

b)



não, pois: $\frac{2,4}{2} \neq \frac{2,7}{1,7}$

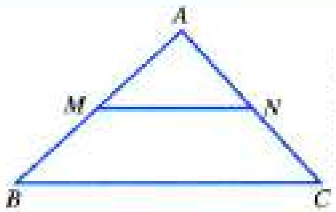
22 Para calcular o comprimento de uma ponte a ser construída, um engenheiro elaborou o esquema abaixo em que o segmento $\overline{CE}$ representa a ponte. Sabe-se que $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$. Calcule, em seu caderno, o comprimento que deverá ter essa ponte. 54 m



Pense mais um pouco...

Reúna-se com um colega e façam o que se pede, no caderno.

1. Em um triângulo ABC, foi traçado um segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$ pelo ponto M, ponto médio de $\overline{AB}$. Esse segmento tem o outro extremo no lado $\overline{AC}$, no ponto N.
   Provem que N é ponto médio de $\overline{AC}$. demonstração



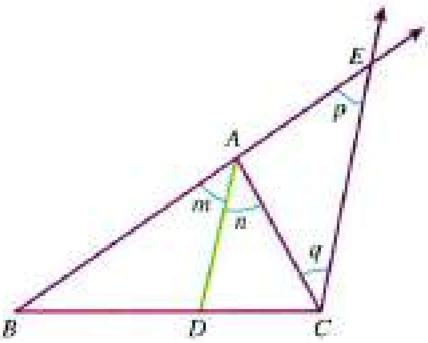
2. Dividir um segmento dado em 5 partes de mesma medida sem usar a escala da régua.
   a) No caderno, executem os seguintes passos:
   - tracem um segmento $\overline{AB}$ e uma semirreta $\overrightarrow{AC}$ de modo que B não pertença à reta $\overleftrightarrow{AC}$;
   - com um compasso, marquem os pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 em $\overrightarrow{AC}$, de modo que $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_5$;
   - tracem a reta $\overleftrightarrow{P_5B}$;
   - com o esquadro deslizando ao lado da régua, tracem, por P_4, P_3, P_2 e P_1, paralelas a $\overleftrightarrow{P_5B}$ que cortam $\overline{AB}$ nos pontos Q_4, Q_3, Q_2, Q_1;
   - verifiquem com o compasso que: $AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5$.

   b) Justifiquem a construção acima.

No item a, foi construído um feixe de retas paralelas, cortado por dois segmentos transversais ($\overline{AP_5}$ e $\overline{AB}$). Como o feixe divide $\overline{AP_5}$ em partes de medidas iguais, pelo teorema de Tales, o feixe também divide $\overline{AB}$ em partes iguais.

2ª consequência

Considere o triângulo ABC e a bissetriz $\overline{AD}$ relativa ao ângulo $\hat{A}$. Traçamos pelo vértice C uma semirreta paralela a $\overline{AD}$, que cruza a semirreta $\overrightarrow{BA}$ em um ponto que chamamos de E.



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE} \quad \text{ou} \quad \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AE}$$

Como $p = m$ (medidas de ângulos correspondentes em retas paralelas), $m = n$ ($\overline{AD}$ é bissetriz) e $n = q$ (medidas de ângulos alternos internos em retas paralelas), concluímos que $p = q$.

Logo, o triângulo CAE é isósceles. Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{AE}$.

Substituindo $\overline{AE}$ por $\overline{AC}$ em $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{DC}{AE}$, temos: $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$

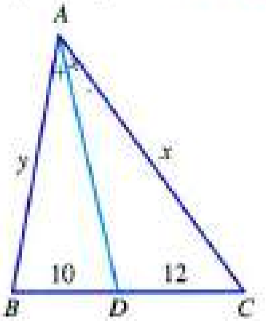
A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

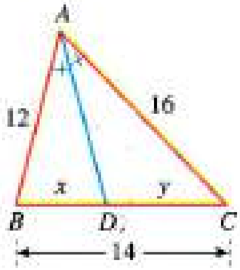
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

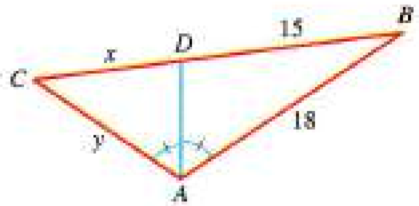
23 Em seu caderno, calcule x e y nos triângulos, sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$:

a) $x + y = 55$ $x = 30$ e $y = 25$ **b)** $x = 6$ e $y = 8$ **c)** $x + y = 22$ $x = 10$ e $y = 12$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



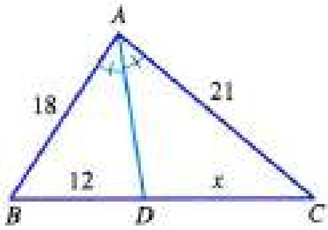


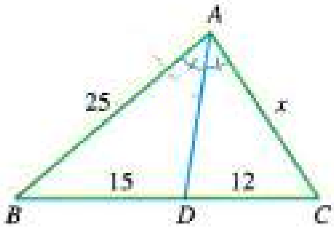


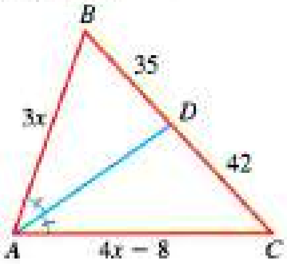
24 Em seu caderno, calcule x nos triângulos, sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$:

a) $x = 14$ **b)** $x = 20$ **c)** $x = 20$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



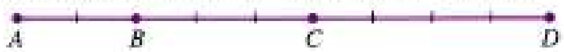




25 Em seu caderno, construa um triângulo ABC em que $AB = 4{,}8$ cm, $AC = 7{,}2$ cm e $BC = 8$ cm. Trace a bissetriz $\overline{AD}$. Determine BD e DC. $BD = 3{,}2$ cm e $DC = 4{,}8$ cm

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

26 Observe a figura e calcule, em seu caderno, as razões indicadas.

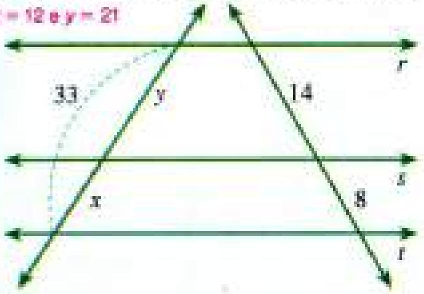


NELSON MATSUDA

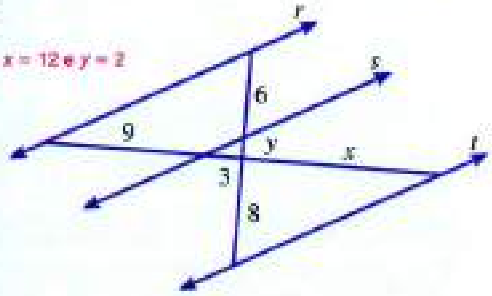
a) $\dfrac{AB}{BC}$ $\dfrac{2}{3}$ **b)** $\dfrac{AB}{CD}$ $\dfrac{1}{2}$ **c)** $\dfrac{AB}{AD}$ $\dfrac{2}{9}$ **d)** $\dfrac{BD}{AB}$ $\dfrac{7}{2}$

27 Sendo $r \parallel s \parallel t$, em seu caderno, calcule x e y:

a) $x = 12$ e $y = 21$

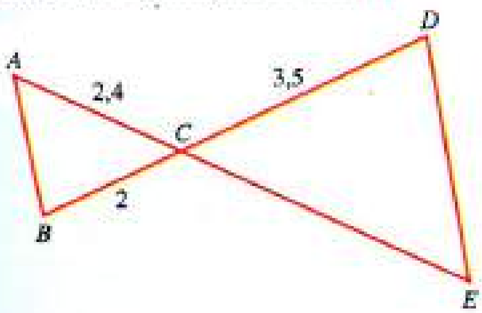


b) $x = 12$ e $y = 2$



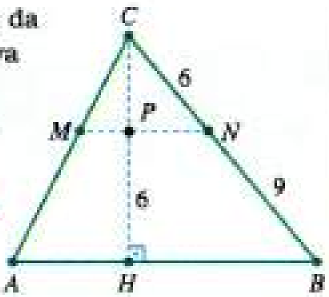
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

28 Em seu caderno, calcule a medida de $\overline{AE}$ na figura, sabendo que $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$. 6,6



NELSON MATSUDA

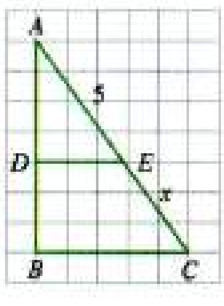
29 Calcule a medida da altura $\overline{CH}$, relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo $\triangle ABC$, sabendo que $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$. $CP = 4$ $CH = 10$



NELSON MATSUDA

30 Em seu caderno, construa um segmento de 11 cm e divida-o em quatro partes iguais sem usar a escala da régua. construção de figura

31 Na figura, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Considerando o lado do quadradinho do quadriculado como unidade de medida, calcule, em seu caderno, o valor de x. $x = 3,75$



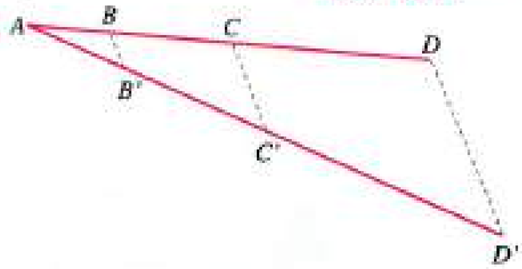
NELSON MATSUDA

32 As medidas dos lados de um $\triangle ABC$ são: $AB = 21$ cm, $AC = 18$ cm e $BC = 26$ cm. Em seu caderno, calcule as medidas dos segmentos determinados no lado $\overline{BC}$ pela bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$. 14 cm e 12 cm

33 A bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$ do $\triangle ABC$ determina sobre o lado $\overline{BC}$ segmentos de 15 cm e 20 cm. Sabendo que o perímetro do $\triangle ABC$ é 84 cm, em seu caderno, calcule as medidas dos lados desse triângulo. 21 cm, 28 cm e 35 cm

34 Resolva em seu caderno.

(Unicamp-SP) A figura mostra um segmento $\overline{AD}$ dividido em três partes: $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm e $CD = 5$ cm. O segmento $\overline{AD'}$ mede 13 cm e as retas, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são paralelas a $\overleftrightarrow{DD'}$. Determine as medidas dos segmentos $\overline{AB'}$, $\overline{BC'}$, $\overline{CD'}$. $AB' = 2,6$ cm, $B'C' = 3,9$ cm e $C'D' = 6,5$ cm



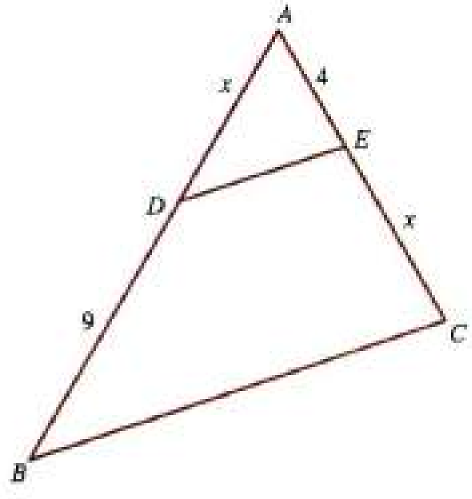
NELSON MATSUDA

35 Construa um triângulo ABC de modo que $AB = 4,2$ cm, $AC = 5,6$ cm e $BC = 7$ cm. Trace a bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$.

Chame de D o ponto de encontro dessa bissetriz com $\overline{BC}$.

Determine as medidas de $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$. $BD = 3$ cm e $CD = 4$ cm

36 No triângulo, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Calcule, em seu caderno, o valor de x. 6



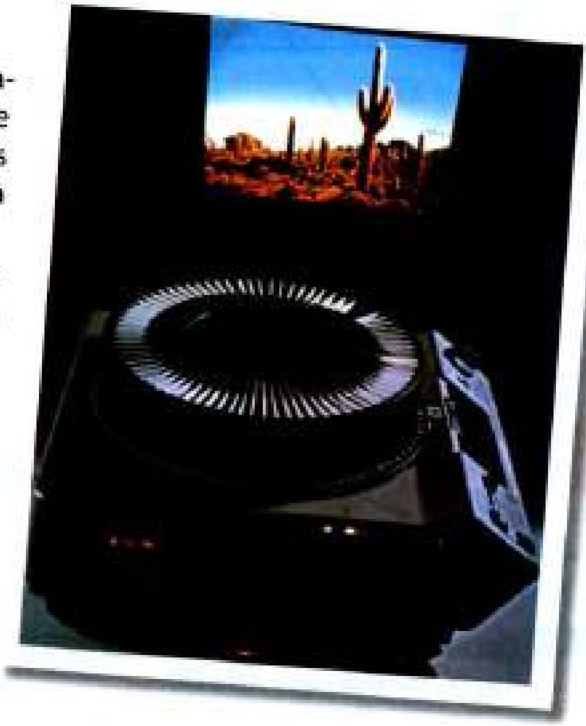
NELSON MATSUDA

4. Figuras semelhantes

Quando projetamos um *slide* em uma tela, a imagem projetada geralmente tem tamanho diferente da original, mas conserva a mesma forma. Dizemos que a figura que aparece na tela é **semelhante** à original.

As fotocopiadoras modernas reproduzem cópias em tamanho ampliado ou reduzido, mas mantendo a forma do original.

Para obter na fotocopiadora uma ampliação de, por exemplo, 50%, devemos digitar 150%, pois a ampliação deverá ser igual ao original (100%) aumentado de 50%. Querendo uma redução de 25%, digitamos 75%, que corresponde ao original (100%) diminuído de 25%.



JUCA MARTINS/OLHAR IMAGEM

Foto original

DELFIM MARTINS/PULSAR

No prédio da Estação da Luz, em São Paulo, funciona o Museu da Língua Portuguesa. (Foto de 2006).

Foto ampliada

DELFIM MARTINS/PULSAR

Foto reduzida

DELFIM MARTINS/PULSAR

Ampliando ou reduzindo figuras em uma fotocopiadora, obtemos figuras semelhantes às originais.

Figuras semelhantes são aquelas que têm a mesma forma mas não necessariamente o mesmo tamanho. Figuras congruentes também são semelhantes.

Pense mais um pouco...

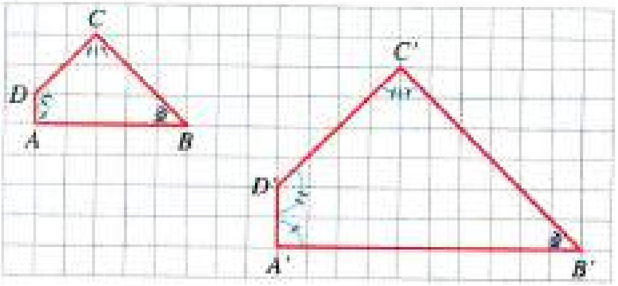
Como este problema tem mais de uma forma de resolução, peça a alguns alunos que expliquem os procedimentos usados. Assim, a classe poderá reconhecer que este é um exemplo de problema com solução única, mas com diferentes formas de resolução.

Em uma foto, a altura de João corresponde a 10 cm. Responda em seu caderno qual é a porcentagem de ampliação que devemos digitar em uma fotocopiadora para que a altura de João, na cópia ampliada da foto original, seja 12 cm.

Devemos digitar 120%, 100% do original mais 20% de ampliação.

Polígonos semelhantes

Veja a ilustração abaixo, na qual ampliamos o polígono *ABCD*, obtendo o polígono *A'B'C'D'*, semelhante ao polígono *ABCD*.



NELSON MATSUDA

Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{A}'$, $\hat{B}$ e $\hat{B}'$, $\hat{C}$ e $\hat{C}'$, $\hat{D}$ e $\hat{D}'$ são chamados de **ângulos correspondentes**. Observe que eles são congruentes: $\hat{A} \cong \hat{A}'$, $\hat{B} \cong \hat{B}'$, $\hat{C} \cong \hat{C}'$ e $\hat{D} \cong \hat{D}'$

Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$, $\overline{DA}$ e $\overline{D'A'}$ são chamados de **lados correspondentes**.

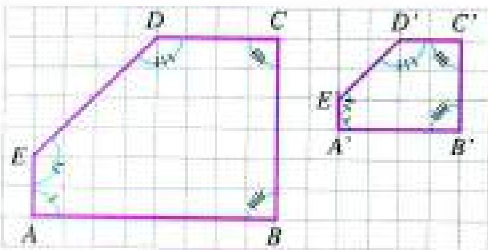
Observe que eles são proporcionais: $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'D'}{CD} = \dfrac{D'A'}{DA} = \dfrac{2}{1}$

O polígono *A'B'C'D'* é semelhante ao polígono *ABCD* e indicamos: $ABCD \sim A'B'C'D'$

Neste caso, dizemos que a **razão de semelhança** entre o polígono ampliado (*A'B'C'D'*) e o polígono original (*ABCD*) é 2. Isto significa que qualquer lado do polígono *A'B'C'D'* tem por medida o dobro da medida do lado correspondente no polígono *ABCD*.

Dois polígonos serão **semelhantes** quando for possível estabelecer uma correspondência entre os lados por proporcionalidade e entre os ângulos por congruência.

Agora, iremos reduzir o polígono *ABCDE*, obtendo o polígono *A'B'C'D'E'*. Veja:



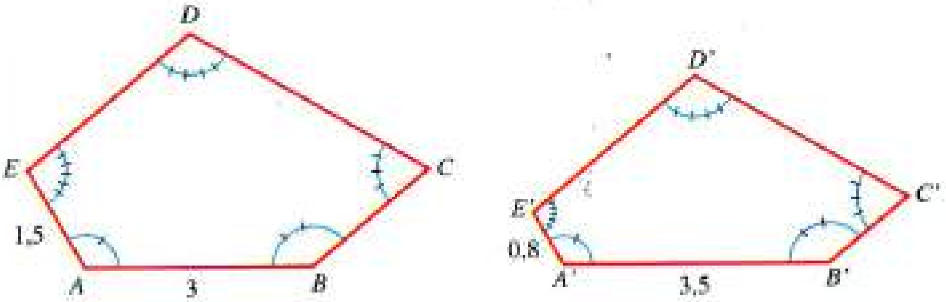
NELSON MATSUDA

Observe que nos polígonos semelhantes *ABCDE* e *A'B'C'D'E'* os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

Qualquer lado do polígono $A'B'C'D'E'$ tem por medida metade da medida do lado correspondente no polígono $ABCDE$. Nesse caso, dizemos que a razão de semelhança entre o polígono reduzido ($A'B'C'D'E'$) e o polígono original é $\frac{1}{2}$: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA} = \frac{1}{2}$

Observe agora o par de polígonos:

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



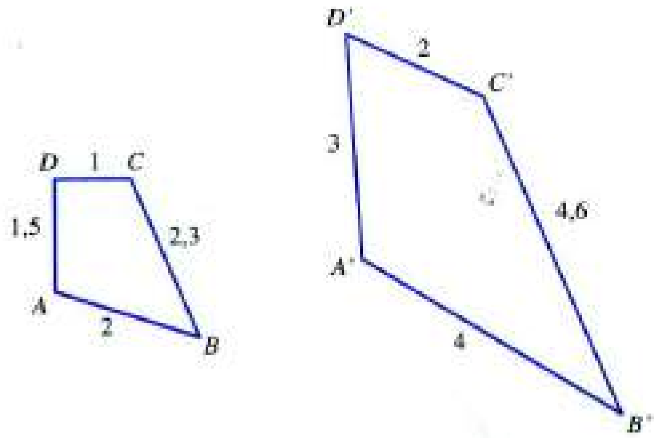
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{3}{3{,}5} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{AE}{A'E'} = \frac{1{,}5}{0{,}8} = \frac{15}{8}$$

Eles têm os ângulos correspondentes congruentes, mas seus lados correspondentes não são proporcionais. Logo, eles **não** são semelhantes.

Veja estes outros polígonos:

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{2{,}3}{4{,}6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{1}{2}$$

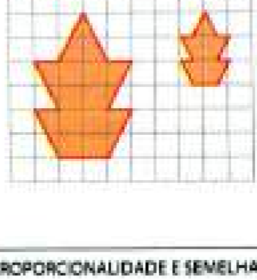
$$\frac{DA}{D'A'} = \frac{1{,}5}{3} = \frac{1}{2}$$

Estes polígonos têm os lados correspondentes proporcionais, mas seus ângulos correspondentes não são congruentes. Logo, eles **não** são semelhantes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

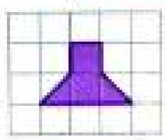
37 Responda em seu caderno: qual é a razão de semelhança entre a figura reduzida (à direita) e a figura original, na ilustração abaixo? $\frac{1}{2}$

NELSON MATSUDA



38 Em um papel quadriculado, amplie a figura abaixo na razão $\frac{3}{1}$. construção de figura

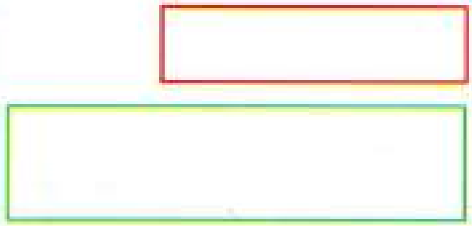
NELSON MATSUDA



39 Responda em seu caderno: Os lados correspondentes de dois polígonos são proporcionais. Podemos dizer que eles são semelhantes? Por quê? Não, porque é necessário também que os ângulos correspondentes sejam congruentes.

40. c) Sim, pois, além de os lados correspondentes serem proporcionais, os ângulos medem 90° e, portanto, os ângulos correspondentes são congruentes.

40 Com uma régua, meça a base e a altura dos retângulos seguintes. Depois, responda às questões em seu caderno.



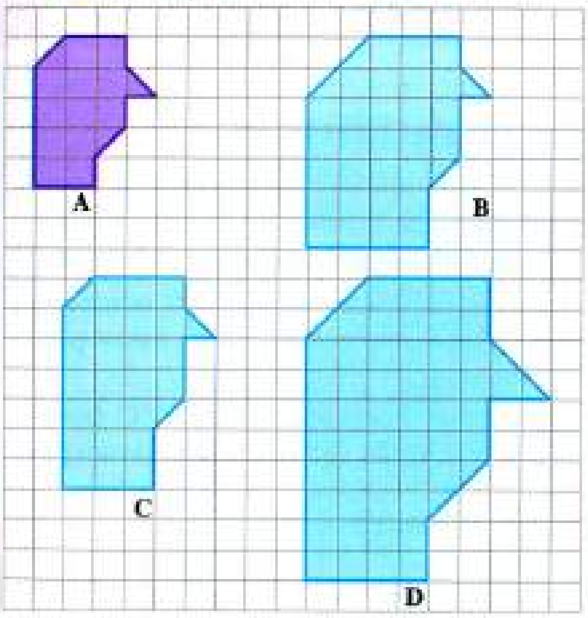
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

a) Qual é a razão entre a medida da base do retângulo vermelho e a medida da base do retângulo verde? $\frac{2}{3}$

b) Qual é a razão entre a medida da altura do retângulo vermelho e a medida da altura do retângulo verde? $\frac{2}{3}$

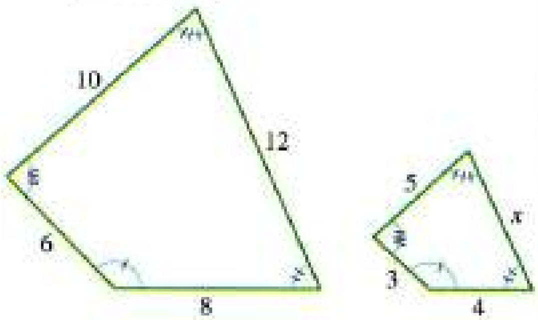
c) Esses retângulos são semelhantes? Por quê?

41 Indique no caderno a figura semelhante à figura A. figura D



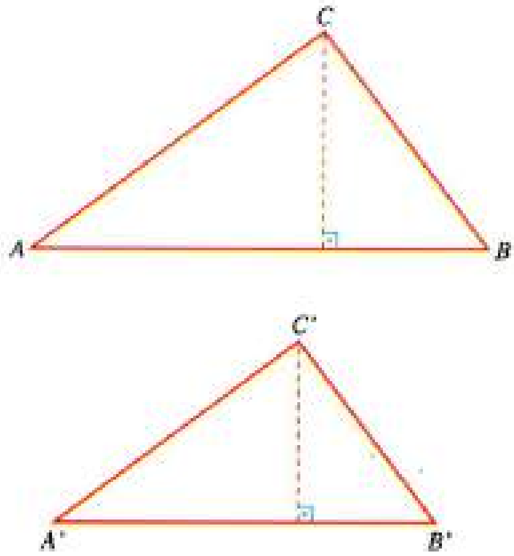
NELSON MATSUDA

42 Os polígonos são semelhantes. Em seu caderno, calcule x. 6



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

43 Considere os triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Com uma régua, determine a medida de seus lados e das alturas relativas a $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$. Considerando as razões, sempre do triângulo ABC para o triângulo $A'B'C'$, responda em seu caderno:

a) Qual é a razão entre as medidas de dois lados correspondentes? 1,2

b) Qual é a razão entre as medidas de duas alturas relativas a lados correspondentes? 1,2

c) Qual é a razão entre os perímetros? 1,2

d) Qual é a razão entre as áreas? 1,44

44 Marcos desenhou em um papel quadriculado, de 1 cm por 1 cm, um triângulo retângulo. Usou 12 lados do quadradinho para a base e 8 para a altura.

Pedro também desenhou um triângulo retângulo com 12 lados do quadradinho para a base e 8 para a altura, mas em um papel quadriculado de 0,5 cm por 0,5 cm.

Sabendo que os triângulos desenhados por Marcos e Pedro são semelhantes, responda em seu caderno:

a) Qual é a razão de semelhança entre os lados do triângulo de Marcos e os lados do triângulo de Pedro? $\frac{2}{1}$

b) Qual é a razão de semelhança entre o perímetro do triângulo de Marcos e o perímetro do triângulo de Pedro? $\frac{2}{1}$

c) Qual é a razão de semelhança entre a área do triângulo de Marcos e a área do triângulo de Pedro? $\frac{4}{1}$

Pense mais um pouco...

Um grupo de amigos fez uma viagem para a Ilha Grande (RJ).

Lá tiraram muitas fotos, que foram reveladas no tamanho 10×15.

Uma das fotos, a da Igreja da Freguesia de Santana, ficou excelente. Resolveram, então, fazer uma cópia ampliada no tamanho 20×30 para cada um.

Na foto original, a igreja tem 7,2 cm de largura (medindo-se pelo beiral superior).

Qual é a medida, em centímetro, dessa largura na cópia ampliada? Responda em seu caderno. 14,4 cm

Igreja da Freguesia de Santana, Ilha Grande (RJ).

COORTESIA DE ELIS INACHOOO

PARA SABER mais

Construindo figuras semelhantes por homotetia

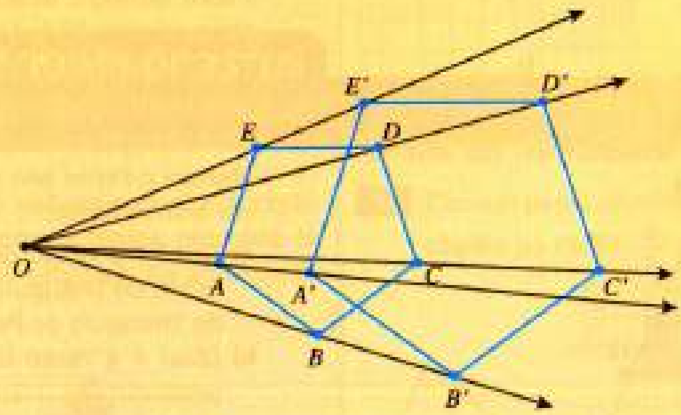
A **homotetia** é um exemplo de transformação geométrica que preserva a forma da figura original mas não necessariamente seu tamanho. Desse modo, a figura original e a figura obtida dela por homotetia são semelhantes. Essas figuras são chamadas de **figuras homotéticas**.

Podemos ampliar ou reduzir figuras usando a homotetia.

Veja como procedemos para ampliar o pentágono *ABCDE*, na razão 1,5, por homotetia.

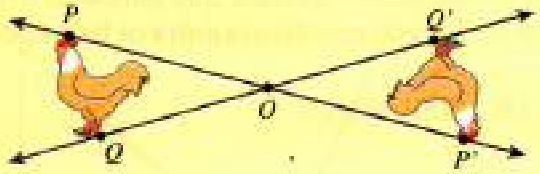
- Fixamos um ponto *O* (centro de homotetia).
- Traçamos, a partir do ponto *O*, semirretas que passam pelos vértices desse pentágono.

Obtemos o pentágono $A'B'C'D'E'$ fazendo $OA' = 1{,}5 \cdot OA$, $OB' = 1{,}5 \cdot OB$, e assim por diante.



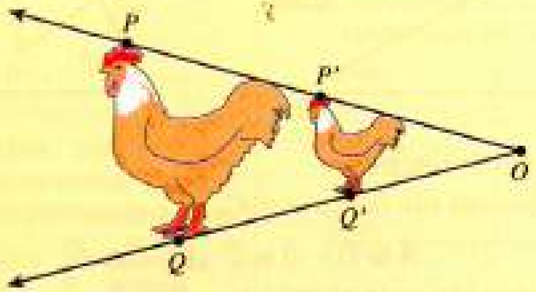
O pentágono $A'B'C'D'E'$ é semelhante ao pentágono ABCDE na razão de semelhança 1,5.

Veja outros exemplos de figuras homotéticas.



NELSON MATSUDA

A figura original foi invertida por homotetia de centro O e razão -1.
Nesse caso, as figuras são congruentes.



NELSON MATSUDA

A figura original foi reduzida por homotetia de centro O e razão $\frac{1}{2}$.

©2009 THE M. C. ESCHER COMPANY - HOLLAND

Identificar com os alunos que as salamandras (pretas por exemplo) são figuras homotéticas.

Cada vez mais pequeno, 1956, de M. C. Escher. Entalhe em madeira, 38 cm × 38 cm.

Por meio da homotetia, podemos formar uma sequência de figuras homotéticas.

Agora é com você!

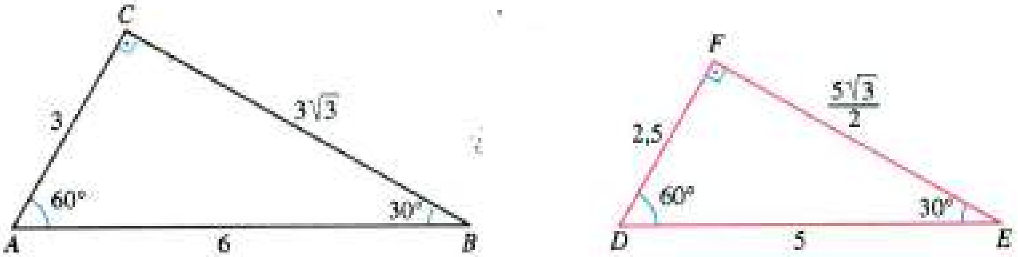
Em seu caderno, desenhe um triângulo retângulo isósceles. Fixe um ponto O e, por homotetia de centro O e razão 2, construa o triângulo homotético ao que você desenhou.
construção de figura

5. Semelhança aplicada a triângulos

Triângulos são polígonos. Então, podemos dizer que para dois triângulos serem semelhantes deve ser possível estabelecer uma correspondência entre os lados por proporcionalidade e entre os ângulos por congruência.

Considere os triângulos *ABC* e *DEF* abaixo.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



Esses triângulos são semelhantes, pois:

- os ângulos correspondentes são congruentes:

$$\hat{A} \cong \hat{D}, \quad \hat{B} \cong \hat{E} \quad \text{e} \quad \hat{C} \cong \hat{F}$$

- os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{6}{5} \quad \text{(razão de semelhança)}$$

OBSERVAÇÕES

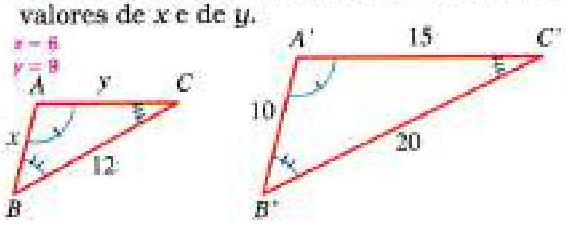
- Para saber quais lados se correspondem, observamos os ângulos opostos a esses lados, assim:
  - o lado $\overline{AB}$ corresponde ao lado $\overline{DE}$ por serem opostos a ângulos congruentes ($\hat{C} \cong \hat{F}$);
  - o lado $\overline{AC}$ corresponde ao lado $\overline{DF}$ por serem opostos a ângulos congruentes ($\hat{B} \cong \hat{E}$);
  - o lado $\overline{BC}$ corresponde ao lado $\overline{EF}$ por serem opostos a ângulos congruentes ($\hat{A} \cong \hat{D}$).
- Se dois triângulos são semelhantes e a razão de semelhança é k, então:
  - a razão entre duas alturas correspondentes é k;
  - a razão entre duas medianas correspondentes é k;
  - a razão entre duas bissetrizes correspondentes é k;
  - a razão entre seus perímetros é k;
  - a razão entre suas áreas é k^2.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

45 Abaixo, temos um par de triângulos semelhantes. Determine, em seu caderno, os valores de x e de y.

$x = 6$
$y = 9$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



46 Os lados de um triângulo medem 12 cm, 18 cm e 20,4 cm. O maior lado de um triângulo semelhante ao primeiro mede 15,3 cm.

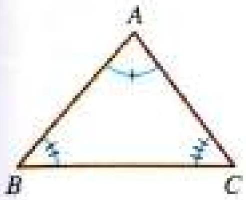
Determine em seu caderno:

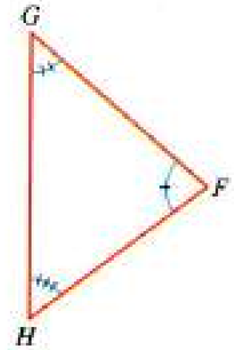
a) o perímetro do segundo triângulo; 37,8 cm

b) a área do segundo triângulo, sabendo que a área do primeiro é $23{,}04\sqrt{11}$ cm². $12{,}96\sqrt{11}$ cm²

47 Responda em seu caderno: quais são os lados correspondentes nestes triângulos semelhantes?

$\overline{BC}$ e $\overline{GH}$
$\overline{AC}$ e $\overline{FH}$
$\overline{AB}$ e $\overline{FG}$

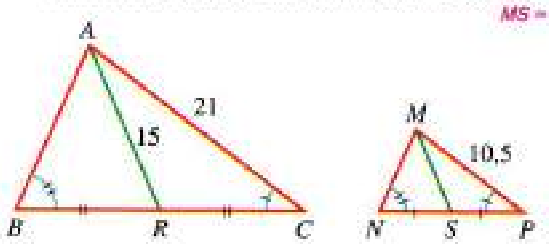




ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

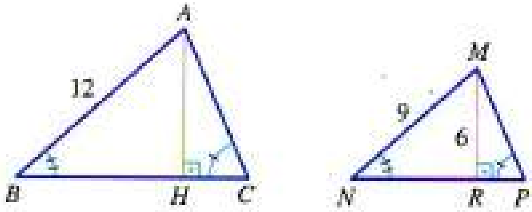
48 Em seu caderno, construa, com régua e compasso, um triângulo escaleno. Depois, construa um triângulo semelhante a esse na razão 3 e outro na razão $\frac{3}{4}$. construções de figuras

49 Sabendo que $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, calcule, em seu caderno, a medida da mediana $\overline{MS}$ do $\triangle MNP$. $MS = 7,5$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

50 Sabendo que $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, calcule, em seu caderno, a medida da altura $\overline{AH}$ do $\triangle ABC$. 8



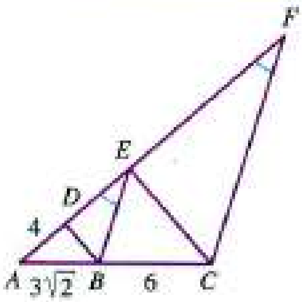
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Pense mais um pouco...

Na figura, $\overline{BD} \,/\!/\, \overline{CE}$ e $A\hat{E}B \cong A\hat{F}C$.

Determine, em seu caderno, a medida de $\overline{AF}$, sabendo que as medidas estão em centímetro.

$(12 + 8\sqrt{2})$ cm



NELSON MATSUDA

PARA SABER mais

A Matemática na História

Para tratar de semelhança, é imprescindível retomar os estudos do filósofo e matemático grego Tales de Mileto (624-547 a.C.), cujo nome está associado ao teorema:

> Se um feixe de paralelas é interceptado por duas retas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais.

Esse teorema, que provém diretamente da ideia de semelhança entre triângulos, é conhecido como **teorema de Tales**.

Sabe-se pouco a respeito da vida e da obra de Tales. Acredita-se que ele tenha sido o primeiro filósofo e geômetra grego conhecido e o primeiro dos sábios gregos. Acredita-se também que Tales tenha criado a Geometria demonstrativa.

Nenhum dos escritos de Tales chegou até nós, o que dificulta a determinação precisa de suas ideias ou a certeza a respeito das descobertas matemáticas que realizou. Muito do que sabemos a respeito de Tales provém do chamado *Sumário eudemiano*, escrito pelo matemático, filósofo e comentarista grego Proclus (411-485).

O *Sumário eudemiano* é um breve resumo do desenvolvimento da Geometria grega desde os primeiros tempos até a época de Euclides, e é ainda hoje o nosso principal registro histórico a respeito do início dessa ciência na Grécia.

Muitos dos conhecimentos de Tales provieram de viagens que ele empreendeu, em especial ao Egito. Tales residiu temporariamente no Egito e, lá, teria aprendido Geometria com os sacerdotes egípcios e, também, teria aplicado a semelhança de triângulos.

Segundo o *Sumário eudemiano*, Tales introduziu a Geometria na Grécia após essas viagens. Utilizando metodologias gerais e empíricas, o filósofo grego descobriu muitas proposições, algumas das quais, provavelmente, envolviam semelhança.

YANN ARTHUS-BERTRAND/CORBIS - STOCK PHOTOS

Pirâmide de Quéops, no Egito. (Foto de 1997).

Além de Proclus, outras fontes mencionam o nome de Tales. O grego Eudemo de Rodhes (350-290 a.C.), o primeiro grande historiador da Matemática, afirma que Tales mediu a distância de uma torre a um navio. Hierônimo, um discípulo de Aristóteles (384-322 a.C.), afirmou que Tales teria medido a altura da grande pirâmide de Quéops, no Egito, por meio da observação e da comparação da própria sombra dele com a sombra da pirâmide. Nesse processo, quando a sombra de Tales tivesse o mesmo comprimento da altura dele, a sombra da pirâmide teria o mesmo comprimento que a altura dela. O matemático e filósofo grego Plutarco (46-119 d.C.) também menciona Tales em sua obra, estabelecendo uma afirmação mais geral ao dizer que Tales mediu a altura da pirâmide fincando verticalmente uma vara no chão e comparando as razões entre os dois triângulos formados.

Com base nesses relatos, vê-se que as ideias de proporcionalidade e de semelhança, em particular entre triângulos, estão estreitamente associadas ao nome de Tales. Unindo esses relatos ao fato de a Arquitetura e a Agrimensura terem grande importância no Egito antigo, bem como ao fato de Tales ter sido o fundador da Geometria demonstrativa na Grécia e o originador da organização da Matemática dedutiva, é razoável a hipótese de que a primeira sistematização da Geometria tenha ocorrido na época de Tales.

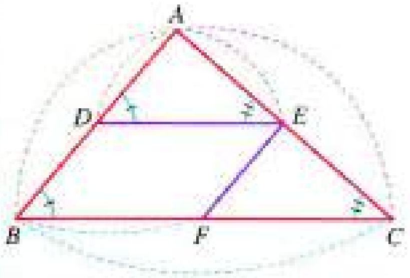
Possivelmente, essa sistematização foi desenvolvida pelo próprio Tales em torno da questão da proporcionalidade de segmentos determinados por um feixe de retas paralelas e cortados por duas retas transversais, o que pressupõe a ideia de semelhança.

Durante muitos séculos, essa questão foi denominada **teorema dos segmentos proporcionais**. Somente no final do século XIX, na França, alguns autores, em virtude da forte associação de Tales às ideias de proporcionalidade e de semelhança, chamaram esse resultado de **teorema de Tales**, denominação que persiste até hoje.

A primeira publicação conhecida que substituiu o nome de "teorema dos segmentos proporcionais" por "teorema de Tales" foi a reedição do livro francês *Elements de Géomètrie*, de Rouche e Comberousse, publicado em 1883. O teorema de Tales traz consigo a ideia de semelhança de triângulos e fornece os subsídios para a compreensão de importantes resultados da Geometria estabelecidos posteriormente, tais como o teorema de Pitágoras.

Teorema fundamental da semelhança

Toda paralela a um lado de um triângulo que cruza os outros lados em dois pontos distintos determina um triângulo semelhante ao primeiro.



Hipótese: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

Tese: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

Construção auxiliar: traçamos, por E, $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$.

Demonstração

① $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (por hipótese)

② $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ (pelo teorema de Tales)

③ $\widehat{A} \cong \widehat{A}$ (ângulo comum)

④ $\widehat{B} \cong \widehat{D}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

⑤ $\widehat{C} \cong \widehat{E}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

⑥ $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$ (pelo teorema de Tales)

⑦ $\overline{BF} \cong \overline{DE}$ (lados opostos de um paralelogramo)

⑧ $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ (de 6 e 7)

⑨ $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ (de 2 e 8)

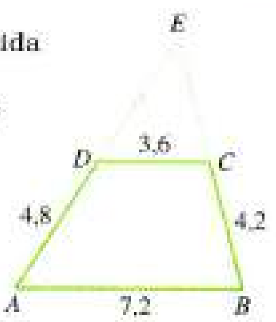
⑩ $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (de 3, 4, 5 e 9)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

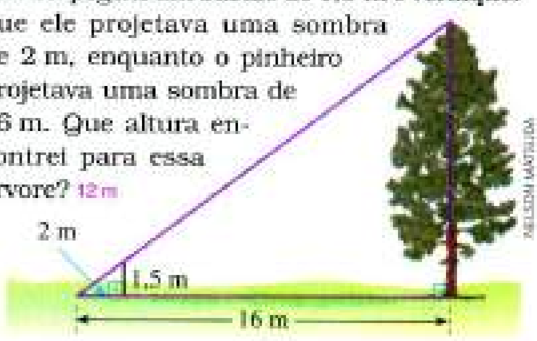
51 Os prolongamentos dos lados não paralelos do trapézio $ABCD$ encontram-se em um ponto E. Em seu caderno:

a) determine a medida de $\overline{AE}$; 9,6

b) calcule a medida de $\overline{CE}$. 4,2



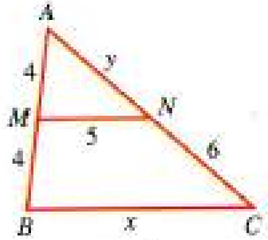
52 Para medir a altura de um pinheiro, fiz o seguinte: peguei um bastão de 1,5 m e verifiquei que ele projetava uma sombra de 2 m, enquanto o pinheiro projetava uma sombra de 16 m. Que altura encontrei para essa árvore? 12 m



53 Determine, em seu caderno, o valor de x e de y em cada caso.

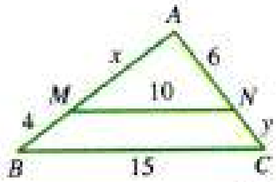
a) $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

$x = 10$
$y = 6$



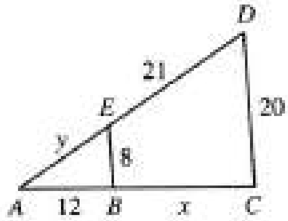
b) $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

$x = 8$
$y = 3$



c) $\overline{EB} \parallel \overline{DC}$

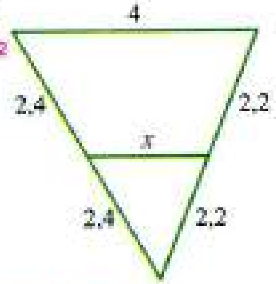
$x = 18$
$y = 14$



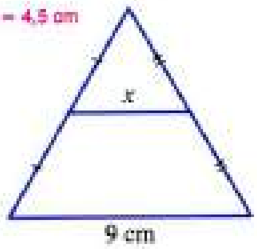
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

54 Em seu caderno, calcule x nos seguintes triângulos:

a) $x = 2$



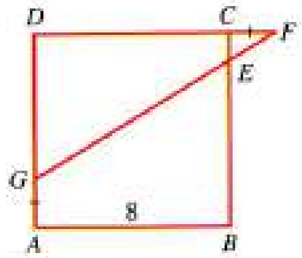
b) $x = 4,5$ cm



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

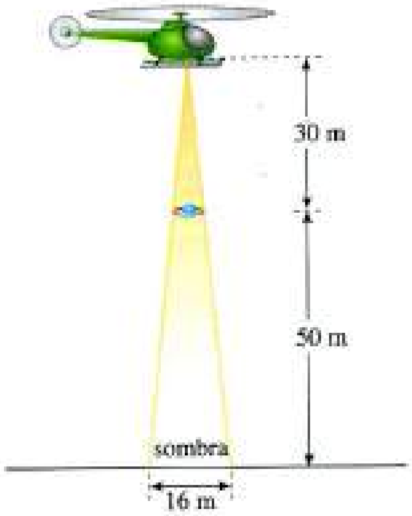
55 Na figura, $ABCD$ é um quadrado e $CF = AG = 2$. Em seu caderno, calcule CE.

1,2



NELSON MATSUDA

56 Resolva a questão em seu caderno.



NELSON MATSUDA

(Unirio-RJ) Numa cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um helicóptero do Exército, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura acima. Sendo assim, pode-se afirmar que o raio do disco voador mede, em m, aproximadamente:

alternativa a

a) 3
b) 3,5
c) 4,0
d) 4,5
e) 5,0

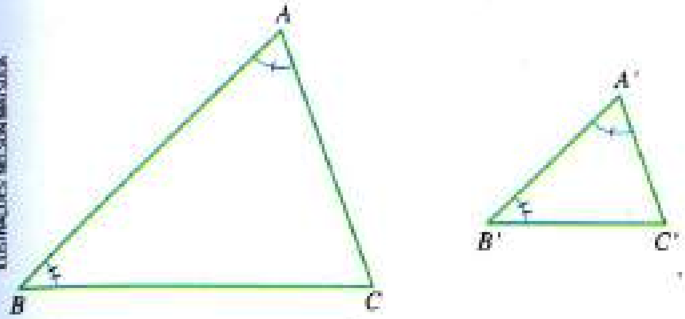
Casos de semelhança de triângulos

Você já viu que dois triângulos semelhantes possuem os ângulos correspondentes congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

No entanto, podemos reconhecer dois triângulos semelhantes pelos casos a seguir.

1º caso – A.A. (ângulo, ângulo)

Se dois triângulos têm dois ângulos correspondentes respectivamente congruentes, então esses triângulos são semelhantes.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Hipótese: $\begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \end{cases}$

Tese: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Demonstração

Supondo $AB > A'B'$, vamos marcar sobre $\overline{AB}$ um ponto D tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Por D, traçamos $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

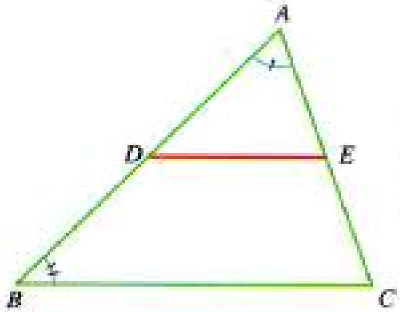
Assim, temos:

① $\hat{D} \cong \hat{B}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

② $\hat{A} \cong \hat{A}'$ (por hipótese)

③ $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ (por construção)

④ $\hat{D} \cong \hat{B}'$ (pois $\hat{B} \cong \hat{B}'$ e $\hat{D} \cong \hat{B}$)



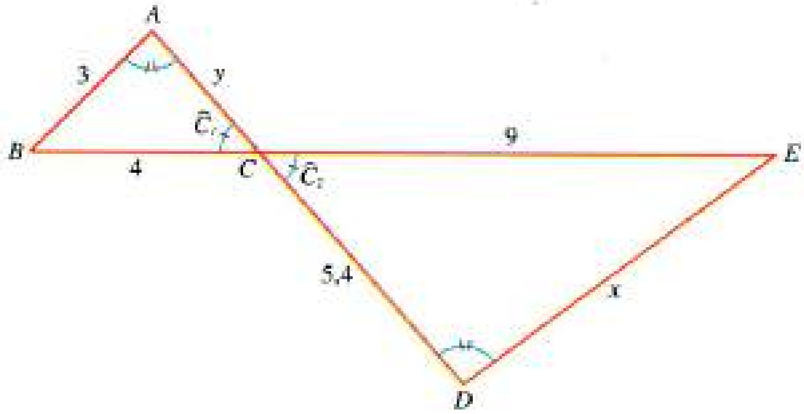
NELSON MATSUDA

Logo, de ②, ③ e ④ temos que o triângulo ADE é congruente ao triângulo $A'B'C'$, pelo caso A.L.A.

Pelo teorema fundamental da semelhança, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

Se $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Como exemplo de aplicação, vamos calcular o valor de x e de y, nos triângulos abaixo, sabendo que $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$.



NELSON MATSUDA

Nesses triângulos, temos:

- $\hat{A} \cong \hat{D}$ (ângulos correspondentes formados por duas retas paralelas e uma transversal)
- $\hat{C}_1 \cong \hat{C}_2$ (ângulos opostos pelo vértice)

Portanto, os triângulos ABC e DEC são semelhantes pelo caso A.A.

Assim, os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB} \qquad \text{e} \qquad \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{9}{4} \qquad\qquad \frac{y}{5{,}4} = \frac{4}{9}$$

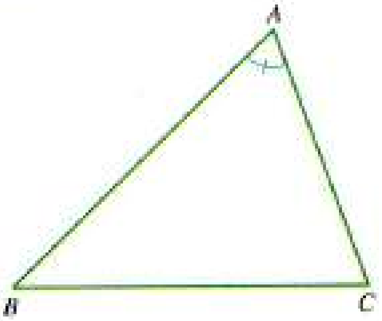
$$x = \frac{3 \cdot 9}{4} \qquad\qquad y = \frac{5{,}4 \cdot 4}{9}$$

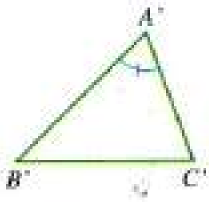
$$x = \frac{27}{4} \qquad\qquad y = \frac{21{,}6}{9}$$

$$x = 6{,}75 \qquad\qquad y = 2{,}4$$

2º caso – L.A.L. (lado, ângulo, lado)

Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.





Hipótese: $\begin{cases} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \\ \hat{A} \cong \hat{A}' \end{cases}$

Tese: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

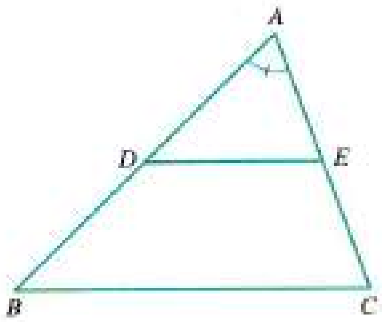
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Demonstração

Supondo $AB > A'B'$, vamos marcar sobre $\overline{AB}$ um ponto D tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Por D, traçamos $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Pelo teorema fundamental da semelhança, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

Vamos mostrar, pelo caso L.A.L., que $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

Já sabemos que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ (por construção) e que $\hat{A} \cong \hat{A}'$ (por hipótese). Resta provar que $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$.



NELSON MATSUDA

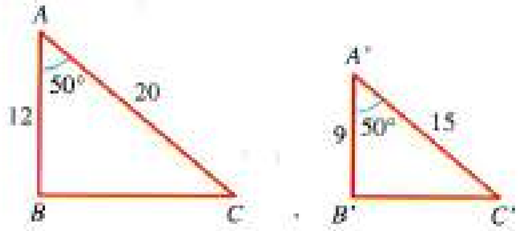
Da conclusão acima ($\triangle ABC \sim \triangle ADE$), podemos escrever $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$, ou ainda, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{AE}$, pois $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$.

Comparando $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{AE}$ com $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ (hipótese), temos: $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$.

Então: $\left.\begin{array}{l} \overline{AD} \cong \overline{A'B'} \\ \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \overline{AE} \cong \overline{A'C'} \end{array}\right\}$ Logo: $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ (pelo caso L.A.L.)

Se $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Como exemplo de aplicação, vamos verificar se os triângulos abaixo são semelhantes.



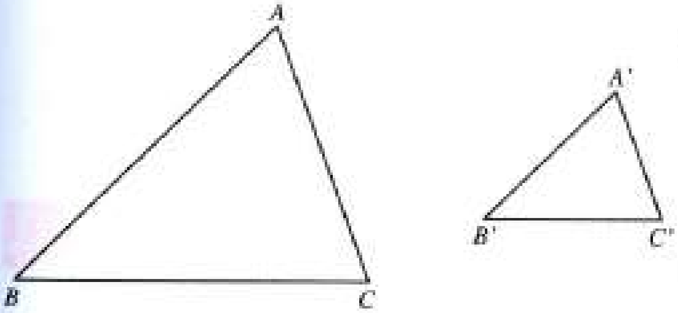
Nesses triângulos, temos:

- $\hat{A} \cong \hat{A}'$ (dado)
- $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$, pois: $\dfrac{12}{9} = \dfrac{20}{15}$

Portanto, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes pelo caso L.A.L.

3º caso – L.L.L. (lado, lado, lado)

Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.

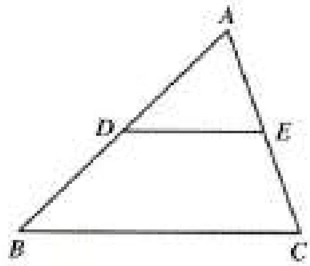


Hipótese: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$

Tese: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Demonstração

Supondo $AB > A'B'$, vamos marcar sobre $\overline{AB}$ um ponto D tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Por D, traçamos $\overline{DE} \mathbin{//} \overline{BC}$. Pelo teorema fundamental da semelhança, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.



Vamos mostrar, pelo caso L.L.L., que $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

Já sabemos que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ (por construção), resta provar que $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$ e que $\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$.

Da conclusão acima ($\triangle ABC \sim \triangle ADE$), podemos escrever:

- $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$, ou ainda, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{AE}$, pois $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$.

Comparando $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{AE}$ com $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ (hipótese), temos: $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

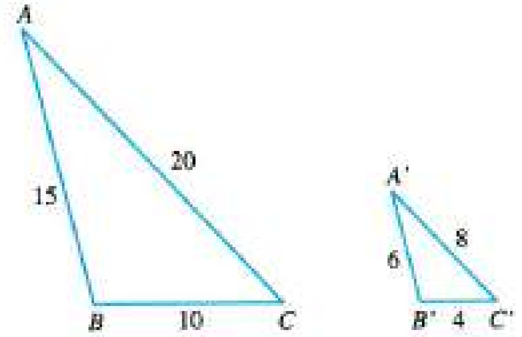
- $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE}$, ou ainda, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{DE}$, pois $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$.

Comparando $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{DE}$ com $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$ (hipótese), temos $\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$.

Então: $\left.\begin{array}{l} \overline{AD} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{AE} \cong \overline{A'C'} \\ \overline{DE} \cong \overline{B'C'} \end{array}\right\}$ Logo: $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ (pelo caso L.L.L.)

Se $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Como exemplo de aplicação, vamos verificar se os triângulos abaixo são semelhantes.



Nesses triângulos, os lados correspondentes são proporcionais:

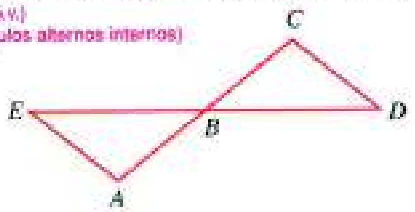
$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$, pois: $\dfrac{15}{6} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{20}{8}$

Portanto, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes pelo caso L.L.L.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

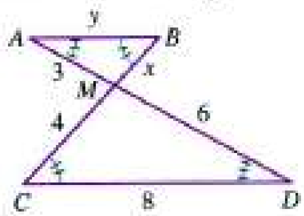
57 Em seu caderno, prove que o $\triangle ABE$ e o $\triangle CBD$ são semelhantes, sabendo que $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$. (*Dica*: desenhe marcando os ângulos congruentes ou mudando a posição de um dos triângulos, para facilitar a visualização.)

$\hat{B}_1 \cong \hat{B}_1$ (o.p.v.)
$\hat{A} \cong \hat{C}$ (ângulos alternos internos)

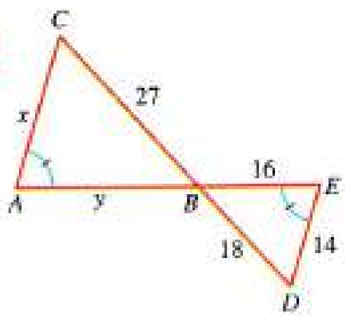


58 Calcule, em seu caderno, x e y em cada caso.

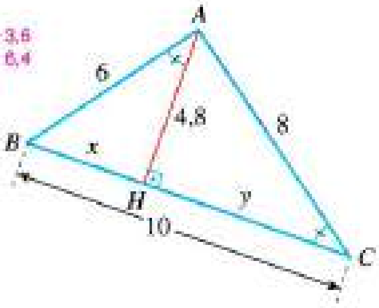
a) $x = 2$
$y = 4$



b) $x = 21$
$y = 24$

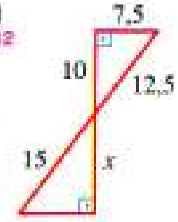


c) $x = 3,6$
$y = 6,4$

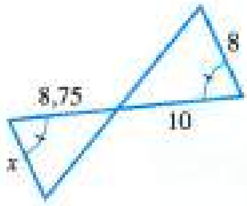


59 Em seu caderno, verifique quais triângulos são semelhantes e calcule o valor de x.

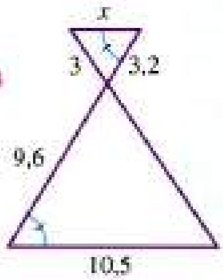
a) 12



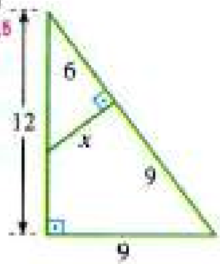
b) 7



c) 3,5



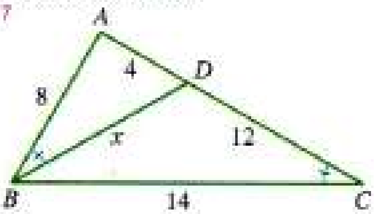
d) 4,5



60 Em cada caso, mostre que os triângulos são semelhantes e calcule o valor de x.

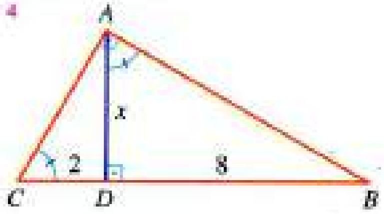
a) $\triangle ABC$ e $\triangle ADB$

7



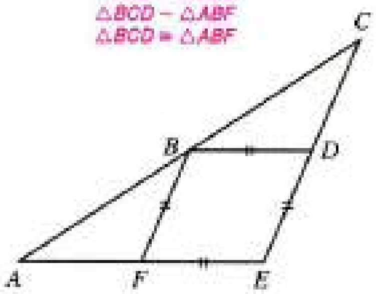
b) $\triangle ADB$ e $\triangle CDA$

4



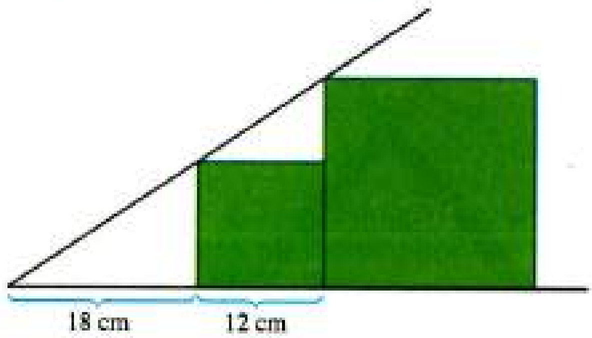
61 Em seu caderno, verifique quais triângulos são semelhantes, sabendo que $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$, $\overline{CE} \parallel \overline{BF}$ e que F é o ponto médio de $\overline{AE}$. Entre esses pares de triângulos semelhantes, quais são triângulos congruentes?

$\triangle ACE \sim \triangle ABF$
$\triangle ACE \sim \triangle BCD$
$\triangle BCD \sim \triangle ABF$
$\triangle BCD \cong \triangle ABF$



Pense mais um pouco...

Na figura abaixo, temos dois quadrados. Em seu caderno, determine o perímetro e a área do quadrado maior. O perímetro é 80 cm e sua área é 400 cm².

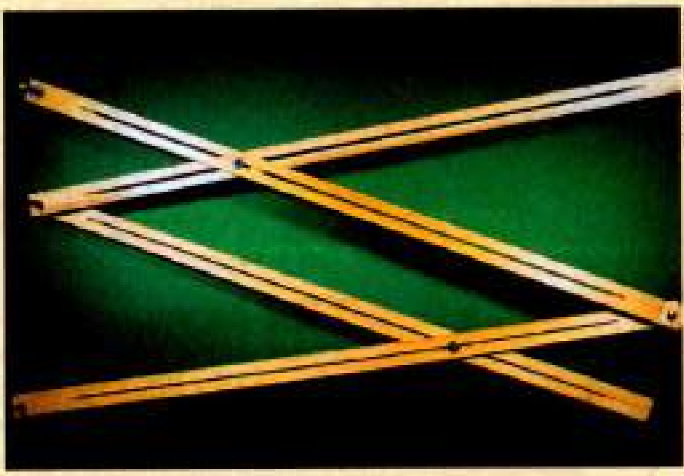


PARA SABER mais

Construindo um pantógrafo

Pantógrafo é um aparelho, como o da foto abaixo, usado para ampliar ou reduzir figuras em uma razão qualquer.

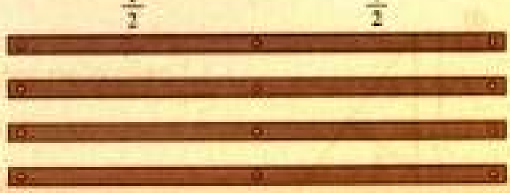
Vejamos como construí-lo.



EDUARDO FELTRIJOO

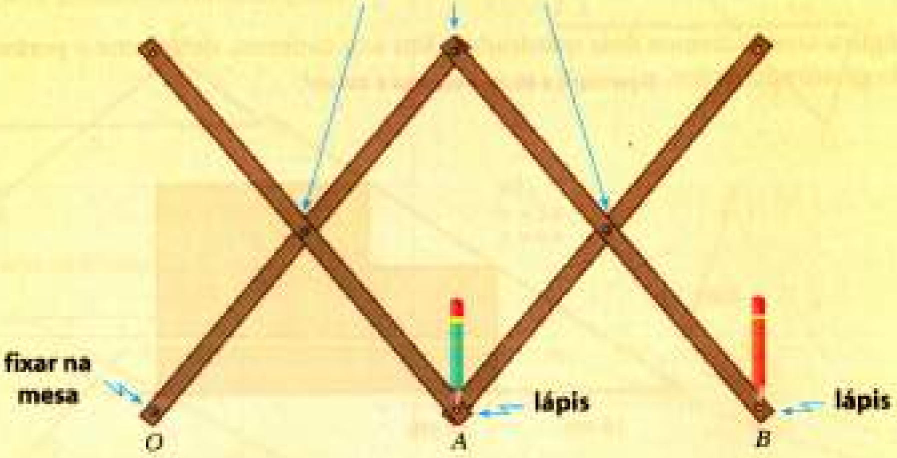
Material

- quatro ripas de madeira pequenas de mesmo comprimento, perfuradas nas extremidades e no centro
- dois lápis
- três parafusos com porcas



NELSON MATSUDA

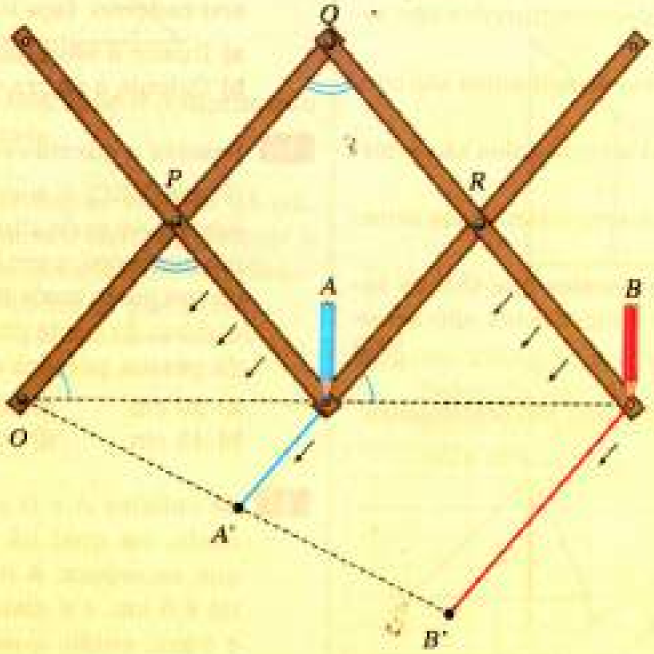
Com os materiais indicados, vamos montar as ripas de madeira de modo que todas as conexões fiquem articuláveis. O ponto *O* deve ficar fixo sobre a mesa. Colocamos em *A* e *B* cada um dos lápis.



NELSON MATSUDA

Pronto, seu pantógrafo está montado.

Observe que os triângulos OPA e OQB são semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{OP}{OQ} = \frac{1}{2}$. Sendo assim, quando você traçar com o lápis A um segmento $\overline{AA'}$, o lápis B traçará um segmento $\overline{BB'}$, com o dobro de seu comprimento.

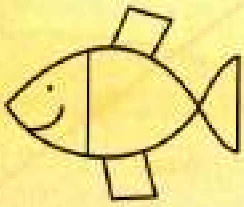


NELSON MATSUDA

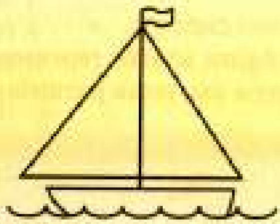
Agora é com você!

Use o seu pantógrafo para desenhar em seu caderno figuras semelhantes a estas, de acordo com a razão de semelhança (k) indicada em cada caso:

a) $k = 2$



b) $k = \frac{1}{2}$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

OBSERVAÇÃO

Perfurando as ripas em várias posições, você poderá montar e desmontar o pantógrafo, obtendo a razão de semelhança que desejar naquele momento.

Assim, se as ripas forem perfuradas em três partes iguais, você poderá triplicar uma figura ou reduzi-la a um terço.

62. Resposta possível: b) Dois triângulos semelhantes com razão de semelhança diferente de 1 não são congruentes.

62 Em seu caderno, classifique cada sentença abaixo em verdadeira ou falsa. Depois, justifique por que algumas delas são falsas.

a) Todos os triângulos congruentes são semelhantes. V

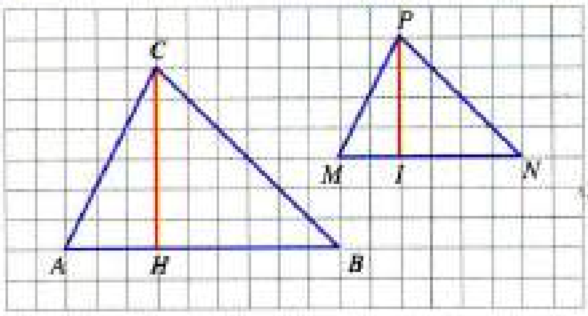
b) Todos os triângulos semelhantes são congruentes. F

c) Todos os triângulos retângulos são semelhantes. F

d) Todos os triângulos equiláteros são semelhantes. V

e) Dois triângulos isósceles que têm os ângulos do vértice congruentes são semelhantes. V

63 O $\triangle ABC$ e o $\triangle MNP$ abaixo são semelhantes.



Em seu caderno, determine a razão entre:

a) os lados $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ $\frac{3}{2}$

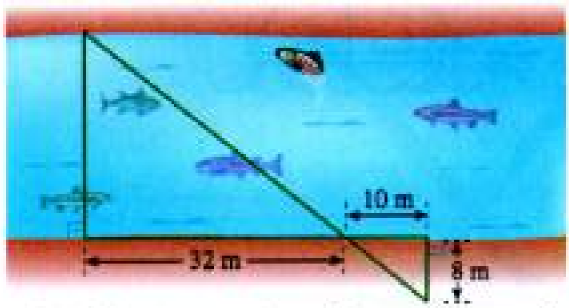
b) os lados $\overline{AC}$ e $\overline{MP}$ $\frac{3}{2}$

c) as alturas $\overline{CH}$ e $\overline{PI}$ $\frac{3}{2}$

d) as áreas dos triângulos ABC e MNP $\frac{9}{4}$

64 Responda em seu caderno.

(Covest-PE) A figura abaixo representa um rio cujas margens são retas paralelas.



Qual é o inteiro mais próximo da largura do rio, medida em metros? 26

65 Em certo momento do dia, um poste projetava sobre a calçada uma sombra de 4 m. Nesse mesmo momento, um homem de 1,80 m de altura, que estava ao lado do poste, projetava uma sombra de 1,20 m. Em seu caderno, faça o que se pede:

a) Ilustre a situação. construção de figura

b) Calcule a altura do poste. 6 m

62: Resposta possível: c) Há triângulos retângulos que não são semelhantes, por exemplo, um triângulo retângulo isósceles e um triângulo retângulo escaleno.

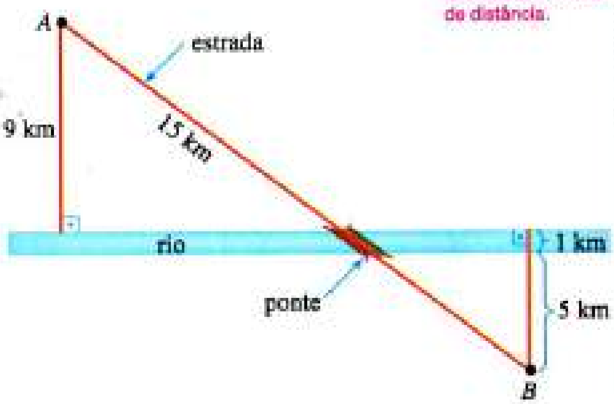
66 Resolva a questão em seu caderno.

(Enem-MEC) A sombra de uma pessoa que mede 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuir 50 cm, a sombra da pessoa passará a medir: alternativa b

a) 30 cm
b) 45 cm
c) 50 cm
d) 80 cm
e) 90 cm

67 As cidades A e B são ligadas por uma estrada, na qual há uma ponte sobre o rio que as separa. A distância da cidade A ao rio é 9 km, e a distância da cidade B ao rio é 5 km; então, quando uma pessoa estiver percorrendo a estrada da cidade A para a B e parar no início da travessia da ponte, já terá percorrido 15 km. A que distância ela estará da cidade B se o rio tem 1 km de largura?

Ela estará a 10 km de distância.



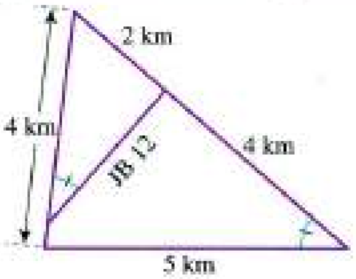
68 Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo medem, respectivamente, 35 cm e 42 cm. No lado $\overline{AB}$, distante 10 cm de A, marca-se um ponto D. Por D, traça-se uma paralela a $\overline{BC}$, que encontra $\overline{AC}$ no ponto E.

a) Construa uma figura que traduza essa situação. construção de figura

b) Determine as medidas de $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$.

$AE = 12$ cm e $EC = 30$ cm

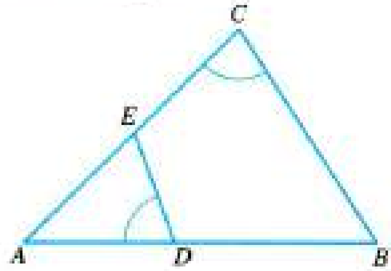
69 O esquema abaixo mostra quatro estradas.



Em seu caderno, determine o comprimento da estrada JB12. 2,5 km

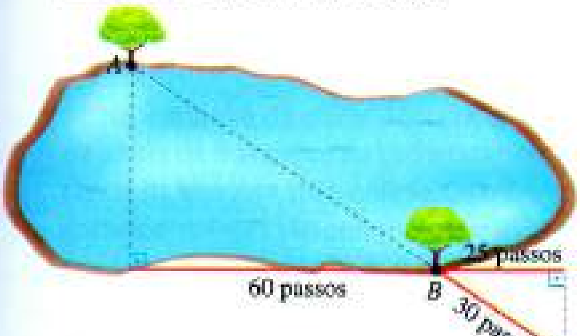
70 Os lados de um triângulo medem 15 cm, 20 cm e 25 cm. Em seu caderno, calcule a medida dos lados de um triângulo semelhante a ele que tenha 45 cm de perímetro.
11,25 cm; 15 cm; e 18,75 cm

71 Considere a figura:



Se $BC = 20$ cm, $AC = 24$ cm, $AD = 12$ cm e $AE = 12{,}6$ cm, determine, em seu caderno, o perímetro do quadrilátero *BCED*. 54,6 cm

72 Veja na figura o procedimento usado por Marcos para descobrir a distância entre as árvores *A* e *B* próximas do lago.



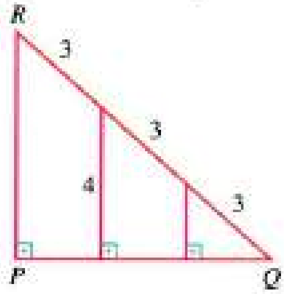
Sabendo que a medida do passo de Marcos é 80 cm, determine, em seu caderno, a distância entre essas árvores, em metros.
72 passos = 57,60 m

73 Os perímetros de dois triângulos são 48 cm e 60 cm. O maior lado do triângulo maior mede 25 cm. Determine, em seu caderno, a medida do maior lado do triângulo menor.
20 cm

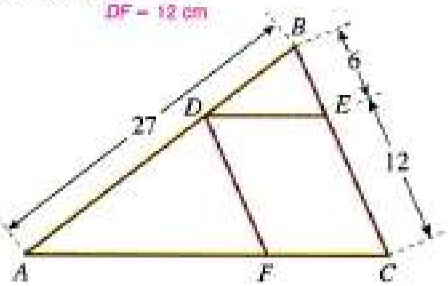
74 Responda à questão no caderno.

(UFRN) Considerando-se as informações constantes no triângulo *PQR* (figura abaixo), pode-se concluir que a altura $\overline{PR}$ desse triângulo mede: alternativa b

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8



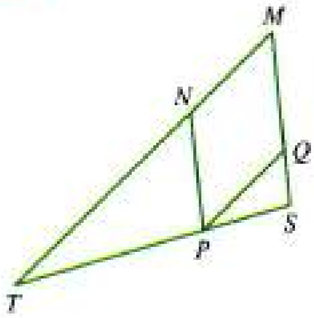
75 No triângulo abaixo, $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ e $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$. Sabendo que $AB = 27$ cm, $BE = 6$ cm e $EC = 12$ cm, calcule, em seu caderno, *BD* e *DF*. $BD = 9$ cm
$DF = 12$ cm



76 Resolva a questão no caderno.

(Mackenzie-SP) Na figura, *MNPQ* é um losango. Se $MT = 12$ e $MS = 6$, o lado do losango mede: alternativa b

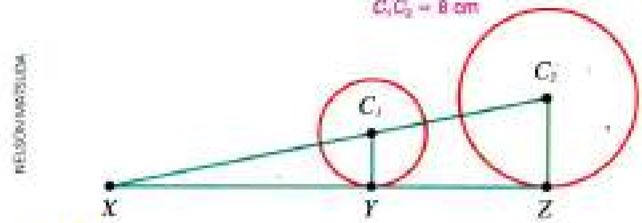
a) 3
b) 4
c) 2
d) $\dfrac{5}{2}$
e) $\dfrac{7}{2}$



77 Uma pessoa deve subir uma rampa que tem 4 m de altura na sua parte mais alta. Tendo começado a subi-la, nota que, após caminhar 12,3 m sobre a rampa, está a 1,5 m de altura em relação ao solo. Calcule, em seu caderno, quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa. 20,5 m

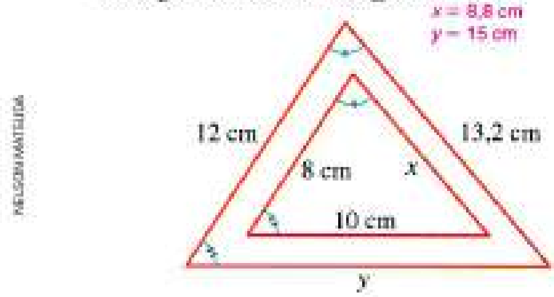
78 Na figura, o raio da circunferência menor mede 6 cm e o raio da circunferência maior mede 10 cm. Se $XC_1 = 12$ cm e $\overline{YC_1} \parallel \overline{ZC_2}$, determine, em seu caderno, a distância C_1C_2.

$C_1C_2 = 8$ cm



79 Em seu caderno, determine os valores de x e de y, indicados na figura abaixo.

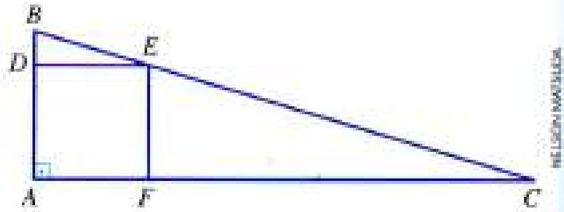
$x = 8,8$ cm
$y = 15$ cm



80 O perímetro do polígono $ABCDE$ é 150 cm e o lado $\overline{AB}$ mede 20 cm. Em seu caderno, determine o perímetro do polígono $MNPQR$, semelhante ao primeiro e cujo lado $\overline{MN}$, correspondente de $\overline{AB}$, mede 30 cm. 225 cm

81 Resolva em seu caderno.

(Fuvest-SP) Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, $ADEF$ é um quadrado, $AB = 1$ e $AC = 3$.



Quanto mede o lado do quadrado? alternativa b

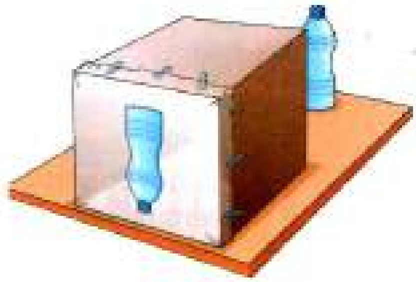
a) 0,70
b) 0,75
c) 0,80
d) 0,85
e) 0,90

DIVERSIFICANDO

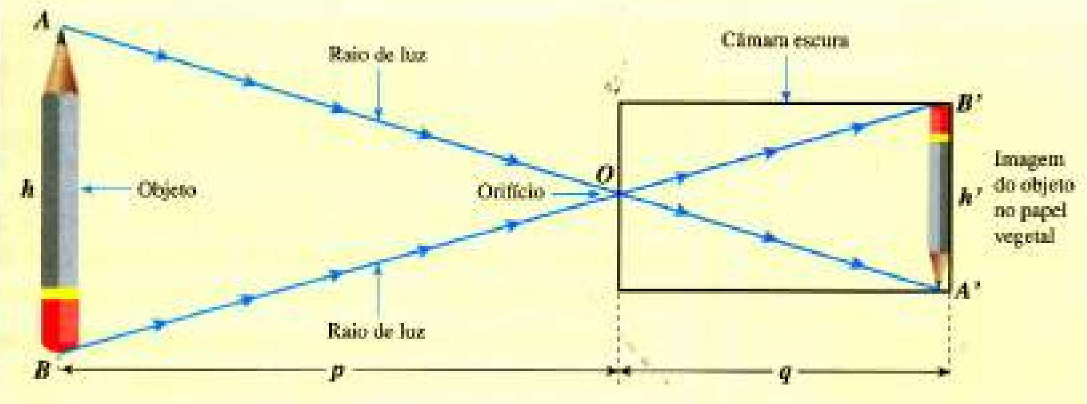
Câmara escura de orifício

ILUSTRAÇÕES: JOSÉ LUIS JUHAS

A câmara escura de orifício é um objeto óptico muito simples, pois forma imagens somente selecionando os raios de luz. Ela pode ser feita com uma caixa ou uma lata qualquer, desde que suas paredes sejam opacas. De um lado, deve ter um pequeno orifício e, na parte oposta ao orifício, um papel vegetal.



Algo interessante acontece quando apontamos o orifício da câmara escura para um objeto iluminado. Podemos observar, no papel vegetal, a projeção da imagem invertida desse objeto. Isso ocorre em virtude de uma importante propriedade da luz que é a de se propagar em linha reta. Veja o esquema.



NELSON MATSUDA

Os triângulos OBA e $OB'A'$ são semelhantes.

No esquema da câmara escura acima, h é a medida da altura do objeto, h' é a medida da altura da imagem e da caixa também, p é a distância do objeto até o orifício e q é a distância da imagem até o orifício. Os triângulos OAB e $OA'B'$ são semelhantes, pois os ângulos correspondentes são congruentes: $A\hat{O}B \cong A'\hat{O}B'$, $A\hat{B}O \cong A'\hat{B}'O$ e $B\hat{A}'O \cong B'\hat{A}'O$. Portanto, por semelhança, vale $h \cdot q = p \cdot h'$.

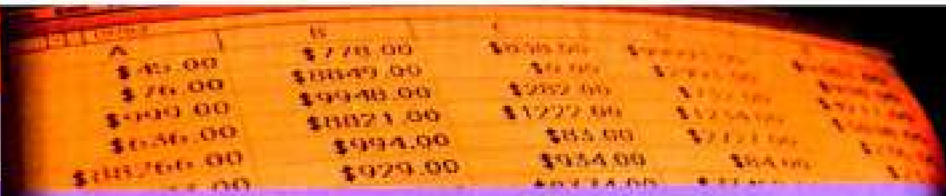
■ **Com o auxílio da ilustração acima, responda às questões em seu caderno.**

1. Se um objeto de 10 cm de altura está a 20 cm de distância do orifício, qual será a altura dele no papel-vegetal? Não é possível calcular, pois as medidas da câmara não são dadas.

2. Felipe usou uma caixa de formato cúbico, com aresta de 20 cm, para fazer uma câmara escura e retratar um quadro pendurado na parede da sua casa. Qual é a distância mínima que esse quadro, de 50 cm × 50 cm, deve ficar do orifício da câmara, para aparecer por inteiro no papel-vegetal? A distância do quadro até o orifício deve ser 50 cm.

CAPÍTULO

3 Estatística e probabilidade



1. Origem da Estatística

A **Estatística** permite coletar, descrever, organizar, analisar e comunicar dados a respeito de uma população ou de um fenômeno.

Os primeiros "dados estatísticos" apareceram em épocas muito remotas, contemporaneamente ao desenvolvimento da escrita. Registros históricos (informações que encontramos em vestígios de civilizações anteriores à nossa) de mais de 2.000 anos antes de Cristo apontam o uso de processos que hoje chamaríamos de estatísticos. Grandes impérios da Antiguidade (como o sumério, o egípcio e o chinês) e da América pré-colombiana (maia, asteca e inca) fizeram uso do levantamento e registro de dados quantitativos para obter informações a respeito de sua população e de suas riquezas, especialmente para fins administrativos, tributários (relativo ao pagamento de impostos) e militares.

Talvez em virtude dessa aplicação derive o próprio termo **estatística**, cuja origem é a palavra latina *status*, que significa "condição, situação" ou "Estado".

A introdução do termo para denominar esse campo de estudo é atribuída a Gottfried Achenwall (1719-1772), professor na Universidade de Göttingen, na Alemanha.

Na atualidade, a estatística é essencial para o desenvolvimento de todas as ciências e está presente no cotidiano por meio de índices, tabelas e gráficos.

Neste capítulo, estudaremos alguns conceitos estatísticos fundamentais para a compreensão de informações estatísticas nas diversas formas pelas quais estas são apresentadas, como: população e amostra, formas de obtenção e organização de dados, representações destes em tabelas e gráficos; e medidas de tendência central.

WERNER FORMAN/CORBIS-LATINSTOCK

O povo inca, que dominou a cordilheira dos Andes entre o século XII e meados do XVI, não conhecia a escrita, mas transportava informações estatísticas em sofisticados artefatos de cordas chamados ***quipos****: a uma corda principal eram amarradas várias cordas enfileiradas, cujos nós representavam quantidades relativas a bens materiais e humanos.*

2. Formas de obtenção, organização e apresentação de dados

A professora Cláudia tem a intenção de fazer um estudo sobre a estatura, em centímetro, dos 30 alunos da turma B.

VICENTE MENDONÇA

Nesse estudo, os 30 alunos da turma B representarão a **população estatística**, isto é, o conjunto dos elementos que a professora Cláudia pretende pesquisar, e a estatura dos alunos, em centímetro, representa a **variável**, ou seja, a característica observada nessa população. Uma variável pode ser **quantitativa** (característica que pode ser medida) ou **qualitativa** (característica que não pode ser medida, atributo). Nesse exemplo, temos uma variável quantitativa.

Veja outros exemplos:

- cor dos olhos – variável qualitativa;
- idade – variável quantitativa;
- massa – variável quantitativa;
- tipo de cabelo – variável qualitativa.

Quando uma pesquisa considera todos os elementos da população, como é o caso da pesquisa da professora Cláudia, ela é denominada **censo**. Mas nem sempre é possível pesquisar toda a população. Por exemplo, se a professora quisesse fazer a pesquisa com todos os alunos da escola, teria trabalho e custos imensos, sem contar o tempo que passaria organizando os dados. Nesses casos, podemos recorrer a uma **amostra**, isto é, a uma parte da população. E os resultados encontrados na amostra poderão ser estendidos para a população. Para que isso seja possível, a amostra tem de ser **representativa**, ou seja, deve apresentar todas as características, quantitativas e qualitativas, da população que representa.

Deve ainda ser **imparcial**, isto é, todos os elementos da população devem ter igual oportunidade de fazer parte da amostra. Existem várias técnicas para a escolha de uma amostra, de forma que garanta que esta represente, da melhor maneira possível, a população da qual foi retirada. Esse estudo será realizado em anos posteriores.

Organização de dados

Para coletar os dados, a professora Cláudia fez a medição da estatura de cada aluno. Ela poderia ter coletado esses dados de outras formas, por exemplo, perguntando diretamente aos alunos ou consultando algum documento no qual essas medidas estivessem registradas.

Ela representou as estaturas, em centímetro, dos 30 alunos no quadro-de-giz à medida que as obteve, por isso os dados não aparecem em ordem.

VICENTE MENDONÇA

Os dados assim apresentados são denominados **dados brutos**. Essa apresentação não favorece a observação de regularidade ou de tendências nos dados; para isso é conveniente organizá-los em forma de **rol**, ou seja, em ordem crescente ou decrescente.

VICENTE MENDONÇA

Com os dados em ordem, podemos facilmente verificar a **frequência absoluta** de cada estatura, ou seja, a quantidade de vezes que cada uma delas se repete no grupo de dados. Podemos, então, organizá-los em uma tabela, chamada **tabela de distribuição de frequência**.

Distribuição da estatura dos alunos da turma B (em centímetro)

Estatura	152	155	160	161	165	166	170	172
Frequência absoluta	4	5	6	4	3	3	3	2

Dados obtidos pela professora Cláudia.

Ao ler a tabela, podemos tirar algumas conclusões:

- A estatura 152 cm tem frequência 4, isto é, 4 alunos têm 152 cm de altura;
- A estatura 170 cm tem frequência 3, isto é, 3 alunos têm 170 cm de altura;
- 15 alunos têm altura até 160 cm, pois: 4 alunos têm 152 cm, 5 têm 155 cm e 6 têm 160 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. Não, pois a amostra não foi formada de maneira imparcial; no caso, concentrou-se em um único bairro.

1 Classifique, em seu caderno, as variáveis em quantitativa ou qualitativa.

a) Salário quantitativa
b) Sexo qualitativa
c) Número de irmãos quantitativa
d) Opinião sobre a qualidade da água qualitativa
e) Número do sapato quantitativa
f) Escolaridade qualitativa

2 Em seu caderno, dê dois exemplos de variáveis quantitativas e dois exemplos de variáveis qualitativas. resposta pessoal

3 Em um clube, cada um dos participantes de um jogo de futebol tinha a idade (em ano) representada abaixo: construção de tabela

17	20	18	16	19
20	17	18	17	19
16	18	18	20	20
17	18	17	19	20
20	16			

Em seu caderno, organize esses dados em uma tabela de distribuição de frequência e, depois, responda às questões:

a) Quantos participantes têm 17 anos? 5
b) Quantos participantes têm até18 anos? 13
c) Qual é o número de participantes com mais de 18 anos? 9

4 Para pesquisar o programa de televisão preferido dos estudantes de uma escola com 1.200 alunos, foram selecionados, de maneira imparcial, 400 alunos. Com base nessas informações, responda em seu caderno:

a) Quantos alunos tem a população envolvida na pesquisa? 1.200
b) A amostra dessa pesquisa é formada por quantos alunos? 400

5 Para realizar uma pesquisa referente à qualidade da coleta de lixo de determinada cidade, o instituto responsável pela pesquisa escolheu uma amostra formada por moradores de um mesmo bairro. Analisando a situação apresentada, pode-se afirmar que as conclusões obtidas por essa pesquisa são significativas? Justifique.

6 As estaturas, em metro, de alguns jogadores de basquete de um clube esportivo são:

1,98	1,99	2,01
2,01	2,05	2,10
1,99	1,99	2,01
2,01	2,05	2,10

Usando essas informações, construa, em seu caderno, uma tabela de distribuição de frequência e responda: construção de tabela

a) Quantos jogadores foram considerados nesse levantamento? 12
b) Quantos jogadores têm estatura superior a 2 metros? 8
c) Nesse grupo de jogadores, qual é a maior estatura? 2,10 m
d) Qual é a estatura que apresenta maior frequência? 2,01 m

7 Um aluno do curso de Medicina registrou o batimento cardíaco por minuto dos colegas de classe. Observe os números que ele registrou:

75	76	77	78	79
80	85	88	90	92
92	75	76	78	78
90	76	78	76	90
92	75	76	77	85
85	85	88	77	77
92	90	78	85	79
90	76	78	76	77
92	90	76	85	80
90	80	78	76	88

Com essas informações, construa, em seu caderno, uma tabela de distribuição de frequência e responda: construção de tabela

a) Quantos alunos de Medicina foram pesquisados? 50 alunos
b) Qual foi o menor batimento por minuto apresentado? 75
c) Quantos alunos apresentaram batimento superior a 79 por minuto? 24 alunos
d) Nesse grupo de alunos, qual valor de batimento por minuto apresenta maior frequência? 76

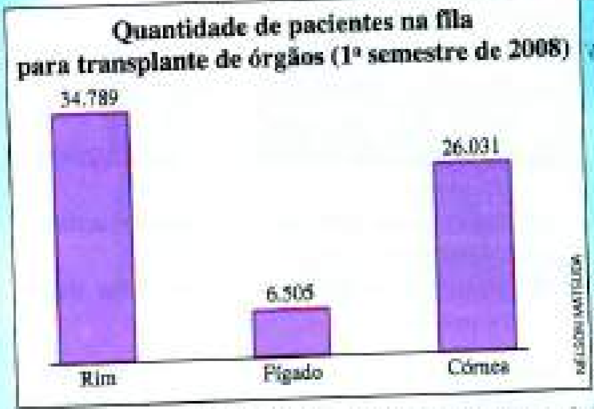
8 Escolha uma variável quantitativa que possa ser pesquisada entre os colegas da classe. Faça a pesquisa, organize os dados em uma tabela de distribuição de frequência e, depois, apresente o resultado aos colegas da classe. resposta pessoal

Apresentação de resultados

Em outros momentos, vocês já aprenderam a interpretar e a organizar dados em **tabelas** e em **gráficos estatísticos**. Essas representações são utilizadas tanto com o objetivo de organizar os dados obtidos em uma pesquisa para observação de padrões ou do comportamento das variáveis, como para comunicação dos resultados encontrados.

Vamos relembrar algumas dessas representações:

Gráfico de colunas



Fonte: Ministério da Saúde. Disponível em: <http://portal.saude.gov.br/portal/arquivos/> Acesso em: 31 mar. 2009.

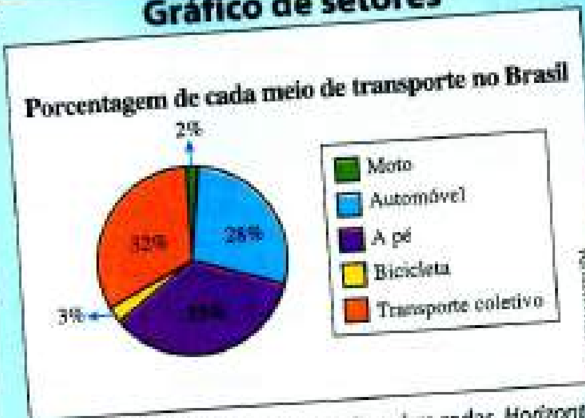
O gráfico de colunas é formado por retângulos de mesma largura, com a base em um eixo *horizontal* e alturas correspondentes a valores em determinada escala.

Gráfico de barras

Fonte: *Veja*. 8 ago. 2007. p. 93.

A construção do gráfico de barras é parecida com a do gráfico de colunas, só que a base dos retângulos que formam as barras fica apoiada no *eixo vertical*.

Gráfico de setores



Fonte: MENEZES, Débora. Evolução sobre rodas. *Horizonte Geográfico*. São Paulo: Horizonte, n. 119, 2008. p. 30.

No gráfico de setores, a frequência de cada dado estatístico é representada por um setor (uma "fatia") do círculo, cuja área é proporcional à área do círculo. Ele é usado quando se deseja relacionar os dados estatísticos entre si ou parte deles com o todo.

Gráfico de linhas

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 11 jul. 2007, p. B4.

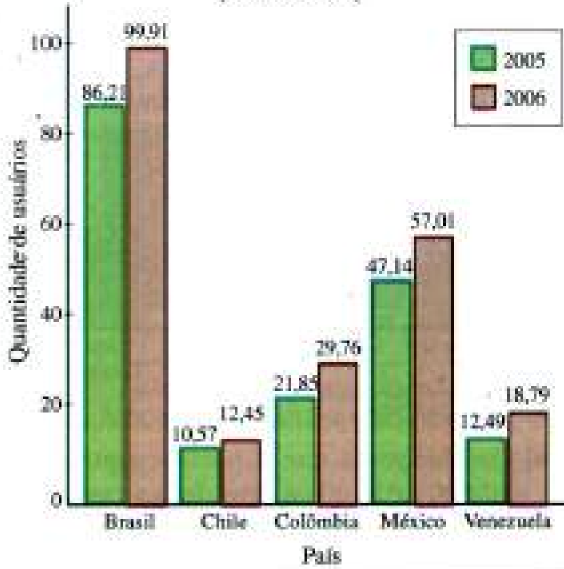
O gráfico de linha é usado principalmente para estudar um fenômeno no decorrer do tempo. Ele tem dois eixos: o *horizontal*, que no exemplo acima foram anotados os intervalos de tempo; e o *vertical* (que pode ficar oculto), em que são marcadas frequências em determinada escala. Unindo os pontos obtidos no cruzamento dos valores marcados nos dois eixos, determinamos a linha do gráfico.

Tanto o gráfico de colunas quanto o de barras são muito utilizados pela facilidade nas construções e pela clareza na apresentação dos dados.

Gráfico de múltiplas entradas

Balança comercial brasileira (em bilhões de dólares)

Usuários de telefones celulares, por país (em milhões)



Fonte: *Folha de S.Paulo*, 16 jan. 2008, p. B7.

Fonte: *Guia Mundial de Estatísticas*, São Paulo: On Line, 2008. n. 1, p. 123.

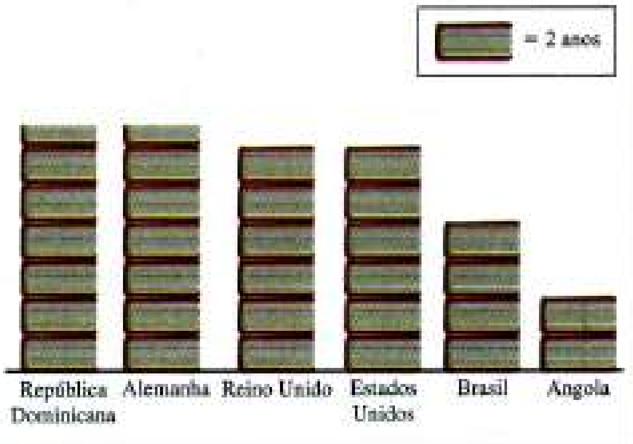
Um gráfico de múltiplas entradas pode ser de linhas, de colunas, de barras, entre outros tipos. Nele, representa-se a mesma característica, estudada em duas ou mais amostras, facilitando a comparação entre elas.

Existem ainda outros tipos de gráfico para apresentar os dados obtidos em uma pesquisa, como os pictogramas e os cartogramas.

Pictogramas

Evolução da produção brasileira de café (em milhares de toneladas)

Tempo obrigatório de estudos por país (em anos)



Fonte: *Anuário Exame de Agronegócio 2008-2009*. São Paulo: Abril, jun. 2008, p. 121.

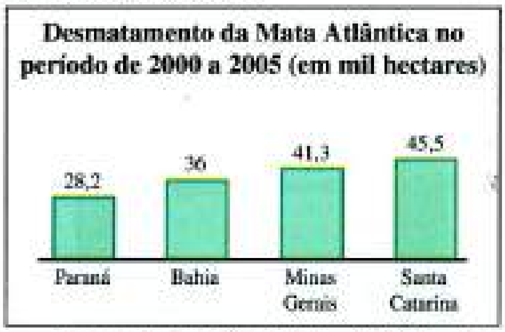
Fonte: *Guia Mundial de Estatísticas*, São Paulo: On Line, 2008. n. 1, p. 34.

Pictograma é um gráfico constituído por desenhos relacionados ao tema. Às vezes as frequências são representadas pela mesma figura em tamanhos proporcionais a essas frequências e, às vezes, escolhe-se uma figura para representar determinada frequência. Esse tipo de gráfico é muito usado em jornais e revistas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9. a) Paraná: 26,1 mil; Bahia: 33,3 mil; Minas Gerais: 38,2 mil; Santa Catarina: 42,1 mil.

9 Considere o gráfico a seguir e responda às questões no caderno.



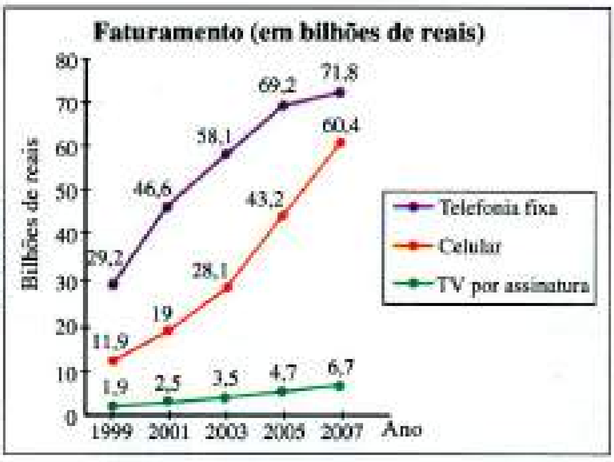
NELSON MATSUDA

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 28 maio 2008, p. A11.

a) Considerando que 1 hectare equivale a 10.000 m², e que a área de um campo de futebol é de 10.800 m², o equivalente a quantos campos de futebol foram desmatados em cada estado?

b) Em seu caderno, construa um gráfico de barras com os dados obtidos no item **b**. construção de gráficos

10 O gráfico a seguir apresenta o faturamento das empresas de telecomunicações no Brasil, de 1999 a 2007. Em seu caderno, faça o que se pede: 10. a) TV por assinatura: 146%; celular: 407%; telefonia fixa: 253%.



NELSON MATSUDA

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 4 maio 2008, p. B6.

a) Calcule a porcentagem de crescimento de cada segmento, de 1999 a 2007, e conclua qual foi o segmento que mais cresceu nesse período.

b) Qual foi o segmento que menos cresceu nesse período? TV por assinatura

c) Redija, em seu caderno, um texto que sintetize as informações apresentadas nesse gráfico. resposta pessoal

11 Observe o mapa e a tabela a seguir.

YURI FERNANDES

Fonte: IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística).

Regiões do Brasil	Área (em milhões de km²)
Norte	3,8
Nordeste	1,5
Sudeste	0,9
Sul	0,6
Centro-Oeste	1,6

a) Em seu caderno, construa um gráfico de colunas que apresente a área de cada região brasileira, conforme a tabela. construção de gráfico

b) Construa um gráfico de colunas que apresente a quantidade de estados de cada região brasileira. construção de gráfico

c) Qual região brasileira tem maior área? Norte

d) Indique a região brasileira que tem maior quantidade de estados. Nordeste

e) É correto afirmar que a região de menor área tem a menor quantidade de estados? Não, pois o número mínimo de estados por região é 3, e existem duas regiões de áreas diferentes que têm 3 estados.

12 Faça uma pesquisa em jornais e revistas e selecione 3 gráficos estatísticos que apresentem dados de assuntos diferentes.

a) Para cada gráfico, elabore três questões.

b) Troque os gráficos que você pesquisou e as questões que você elaborou, com outro colega.

Responda às questões elaboradas pelo colega e, depois, conversem sobre as respostas apresentadas.

13 A consultora Economática realizou uma pesquisa para verificar o lucro de algumas empresas brasileiras que possuem ações negociadas na bolsa de valores. Os dados obtidos foram registrados no gráfico de colunas ao lado.

a) Em seu caderno, construa um gráfico de linha para essa situação. construção de gráfico

b) Em que ano o lucro das empresas foi maior? 2009

c) O que é possível observar em relação ao lucro das empresas brasileiras nesse período? Oscilou.

d) Em sua opinião, qual dos dois tipos de gráfico permite visualização mais rápida da sequência dos lucros obtidos, nas empresas brasileiras, no período de 2004 a 2009? resposta pessoal

No item d, espera-se que o aluno perceba que no gráfico de linha a sequência dos acontecimentos cronológicos fica mais evidente.

Dados obtidos em: Economática.

3. Frequência relativa

Elaborou-se uma pesquisa sobre o gênero de música preferido dos alunos de duas turmas, turma A e turma B, do 9º ano do colégio Monte Alegre. Na turma A há 26 alunos e na B, 35 alunos. O resultado obtido na pesquisa foi organizado na tabela a seguir:

Gênero de música preferido entre os alunos do 9º ano		
	Frequência absoluta: Turma A	Frequência absoluta: Turma B
Pagode	8	12
Axé	5	8
Rock	10	10
Sertanejo	1	1
Outros	2	4
TOTAL DE ALUNOS	26	35

Dados obtidos pelo colégio Monte Alegre.

Observando os resultados da tabela, é possível afirmar que o *rock* e o sertanejo têm a mesma popularidade nas duas turmas?

Apesar de os dois gêneros de música, *rock* e sertanejo, apresentarem mesma frequência absoluta (número de alunos) nas duas turmas, a popularidade de cada tipo de música não é igual, pois as duas turmas têm total de alunos diferentes. Nesse caso, para o *rock*, na turma A temos 10 alunos em um total de 26 alunos, enquanto na turma B temos 10 alunos em um total de 35. A mesma observação pode ser feita para o sertanejo.

Nessa situação, só podemos comparar a popularidade de um gênero musical entre as duas turmas se observarmos a **razão** entre o número de alunos que preferem determinado tipo de música e o total de alunos da turma. Essa razão, em estatística, é chamada de **frequência relativa**.

A frequência relativa (Fr) é dada por: $\dfrac{\text{Frequência absoluta } (Fa)}{\text{Total de elementos } (n)}$

Na turma A, calculamos a frequência relativa para o gênero de música pagode, da seguinte maneira:

$$Fr = \frac{8}{26} \simeq 0{,}31$$

Para o mesmo gênero de música, na turma B, temos:

$$Fr = \frac{12}{35} \simeq 0{,}34$$

Calculando as frequências relativas para os outros gêneros de música, podemos montar a seguinte tabela:

Gênero de música preferido entre os alunos do 9º ano		
	Frequência relativa: Turma A	**Frequência relativa: Turma B**
Pagode	$\frac{8}{26} \simeq 0{,}31$	$\frac{12}{35} \simeq 0{,}34$
Axé	$\frac{5}{26} \simeq 0{,}19$	$\frac{8}{35} \simeq 0{,}23$
Rock	$\mathbf{\frac{10}{26} \simeq 0{,}38}$	$\mathbf{\frac{10}{35} \simeq 0{,}29}$
Sertanejo	$\mathbf{\frac{1}{26} \simeq 0{,}04}$	$\mathbf{\frac{1}{35} \simeq 0{,}03}$
Outros	$\frac{2}{26} \simeq 0{,}08$	$\frac{4}{35} \simeq 0{,}11$
TOTAL	**1,00**	**1,00**

Dados obtidos pelo colégio Monte Alegre.

A frequência relativa geralmente é apresentada na forma percentual. Organizando os dados na forma percentual, obteríamos a seguinte tabela:

Gênero de música preferido entre os alunos do 9º ano		
	Frequência relativa: Turma A	**Frequência relativa: Turma B**
Pagode	31%	34%
Axé	19%	23%
Rock	**38%**	**29%**
Sertanejo	**4%**	**3%**
Outros	8%	11%
TOTAL	**100%**	**100%**

Dados obtidos pelo colégio Monte Alegre.

Com base nos dados dessa tabela, podemos concluir que apesar de *rock* e sertanejo apresentarem a mesma frequência absoluta, a frequência relativa para esses gêneros musicais não foi a mesma. Com isso, podemos concluir que a popularidade de cada um desses gêneros não é igual nas duas turmas.

17. a) Não. Apesar de as frequências absolutas de meninos e meninas que acessam por 4 horas a internet serem iguais, não há nessa turma o mesmo número de meninos e meninas. Então, o percentual de meninos e o de meninas em relação ao total são diferentes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

c) É a frequência relativa na forma percentual das crianças nascidas com 3.190 gramas.

14 Na tabela abaixo estão as massas, em grama, de 50 crianças nascidas na Maternidade Bem Nascidos, em determinado período.

Massa, em grama, dos recém-nascidos

Massa	Frequência absoluta
2.560	7
2.680	7
2.780	10
2.850	12
2.980	6
3.190	8

Dados obtidos pela Maternidade Bem Nascidos.

a) Reproduza essa tabela, acrescentando uma terceira coluna com a frequência relativa. construção de tabela

b) Qual é a porcentagem da massa que apresentou maior frequência? 24%

c) Observando a tabela que você construiu, qual é o significado dos 16%?

d) Considerando ideal que a massa de um recém-nascido seja de mais de 2.900 g, o que podemos concluir com base nos dados dessa maternidade, nesse período? resposta possível: Que apenas 28% dos recém-nascidos nasceram com massa ideal.

15 Em uma pesquisa para saber o tempo, em hora, que os jovens gastam ouvindo música durante um dia obtiveram-se os seguintes resultados:

0,5	3,0	4,5	3,0	1,0
1,0	3,0	4,5	3,0	1,0
1,0	4,0	4,0	3,0	4,0
4,0	4,5	0,5	3,0	4,0

a) Em seu caderno, construa uma tabela de distribuição de frequência para essa situação, apresentando a frequência relativa em porcentagem. construção de tabela

b) Qual é a frequência dos jovens que gastam mais de 3 horas ouvindo música durante um dia? 8

c) Determine a frequência relativa dos jovens que gastam 3 horas ouvindo música durante um dia. 30%

d) Analisando a tabela de distribuição de frequência construída, o que representam os 25%? É a frequência relativa dos jovens que gastam 4 horas ouvindo música durante um dia.

e) Podemos afirmar que mais de 50% dos jovens passam mais de 3 horas, por dia, ouvindo música? Justifique sua resposta.

Não, pois os jovens que passam mais de 3 horas, por dia, ouvindo música representam 40% do total de jovens consultados.

16 Com base no gráfico resolva no caderno.

Número de alunos, por idade (em anos), da Escola Santa Rita que participaram do Enem*

Dados obtidos pela Escola Santa Rita.
*Enem: Exame Nacional do Ensino Médio.

a) Construa uma tabela de distribuição de frequência com a frequência relativa em porcentagem. construção de tabela

b) Qual é a frequência relativa dos participantes do Enem com 18 anos na Escola Santa Rita? 15%

c) Qual é a porcentagem de participantes com idade superior a 17 anos? 25%

d) O que é possível perceber, em relação à participação no Enem, à medida que a idade dos alunos aumenta? Que a participação diminui.

17 A tabela abaixo mostra o tempo, em hora, que os meninos e as meninas da turma B acessam a internet semanalmente:

Tempo, semanal, de acesso à internet

	Frequência absoluta: meninos	Frequência absoluta: meninas
Até 1 hora	7	0
2 horas	9	9
3 horas	6	6
4 horas	5	5
5 horas	3	4
Total	**30**	**24**

Dados obtidos pela Escola Monte Alegre.

a) De acordo com os dados da tabela, é possível afirmar que na turma B o percentual de meninos e o percentual de meninas que acessam a internet por 4 horas semanalmente são iguais? Justifique.

b) Construa a tabela de frequência relativa na forma percentual e verifique se sua resposta do item **a** está correta.

b) A tabela de frequência percentual mostra que o percentual de meninas ≈ 21% que passam 4 horas na internet é maior que o de meninos ≈ 17%.

4. Medidas de tendência central ou medidas-resumo

Vimos anteriormente vários recursos ou técnicas estatísticas para a descrição do grupo de valores que uma variável pode assumir. Observamos que as organizações de dados em tabelas de frequências e gráficos podem fornecer informações sobre o comportamento de uma variável, permitindo a verificação de tendências e padrões. Porém, às vezes, precisamos resumir ainda mais um conjunto de dados para expressar determinada característica da população pesquisada.

Medidas de tendência central são medidas que podem resumir um conjunto de dados a um só valor que seja representativo de todos os dados. São elas: **moda**, **média** e **mediana**.

Moda

Na tabela a seguir, temos a distribuição de frequência absoluta da estatura, em metro, de cada aluno da escola Porto Feliz.

Distribuição da estatura dos alunos										
Estatura (em metro)	1,50	1,55	1,56	1,58	1,60	1,62	1,68	1,70	1,72	1,75
Frequência absoluta	10	15	22	23	25	35	12	10	5	3

Dados obtidos pela escola Porto Feliz.

Observe que a estatura que apresenta a maior frequência (35) é 1,62 m. Então, dizemos que **1,62 m** é a **moda** desse grupo de alunos.

Tendo como referência o mesmo grupo de alunos, foi construída uma tabela de distribuição de frequência absoluta das idades:

Distribuição das idades dos alunos						
Idade (em anos)	10	11	12	13	14	15
Frequência absoluta	11	34	34	32	31	18

Dados obtidos pela escola Porto Feliz.

Na tabela, as idades que apresentam a maior frequência (34) são 11 e 12 anos. Então, dizemos que existem **duas modas: 11 anos** e **12 anos.**

Moda é o elemento ou os elementos que se destacam por apresentar a maior frequência absoluta no grupo pesquisado.

Acompanhe mais um exemplo:

Na tabela a seguir, temos o resultado de uma pesquisa encomendada por uma empresa de TV por assinatura sobre a preferência de 2.000 clientes em relação a alguns canais.

Preferência dos telespectadores sobre alguns canais de TV						
Canais de TV	Canal X	Canal Y	Canal Z	Canal K	Canal W	**TOTAL**
Frequência absoluta: telespectadores	420	600	500	280	200	**2.000**

Dados obtidos pela empresa de TV por assinatura Mundial.

Neste exemplo, o canal de TV que apresenta maior frequência, 600 telespectadores, é o canal Y. Podemos dizer, então, que esse canal é a moda nessa pesquisa.

Quando todos os elementos de uma pesquisa tiverem uma mesma frequência, dizemos que não há moda. Por exemplo:

Quantidade de alunos que usou o transporte público nos 6 últimos meses: 700, 700, 700, 700, 700, 700

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

18 Para avaliar a qualidade das lâmpadas produzidas por uma empresa, foi registrado o tempo, em dia, de duração de 20 dessas lâmpadas:

15	10	12
14	10	12
12	12	12
13	13	14
14	10	15
14	15	12
15	10	

a) Em seu caderno, construa uma tabela de distribuição de frequência absoluta para essa situação. construção de tabela

b) Determine a moda dessa distribuição de frequência. 12 dias

19 Em uma pesquisa sobre as preferências esportivas de 1.500 pessoas, obteve-se:

Esporte preferido	Frequência absoluta
natação	250
basquete	150
futebol	350
voleibol	250
tênis	210
judô	290

Podemos dizer que, entre os pesquisados, o esporte da moda é o futebol? Justifique.
Sim, pois a moda é o futebol, que tem a maior frequência.

20 Faça uma pesquisa com os colegas da classe e descubra qual é o esporte da moda, entre vocês. resposta pessoal

Média aritmética

Você já viu anteriormente como calcular a média de um conjunto de dados. Vamos relembrar:

Alexandre, o professor de Física, avisou aos alunos que a média bimestral seria calculada conforme o seguinte critério: adicionam-se as notas obtidas no projeto, na prova e no trabalho em grupo e divide-se o resultado obtido por 3.

Laura é uma das alunas do professor Alexandre. Assim que recebeu todas as notas, Laura foi logo calculando sua média bimestral. Veja:

$$\text{média} = \frac{\overset{\text{projeto}}{5{,}0} + \overset{\text{prova}}{6{,}5} + \overset{\text{trabalho em grupo}}{9{,}5}}{3} = \frac{21}{3} = 7{,}0$$

Portanto, nesse bimestre, Laura obteve média 7,0.

A **média aritmética** das notas de Laura, ou simplesmente a média das notas, é 7,0. É como se Laura tivesse obtido notas 7,0 em todas essas atividades.

Para calcular a média aritmética de dois ou mais números, dividimos a soma desses números pela quantidade de números dados.

Média aritmética ponderada

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

A prefeitura de um município brasileiro promoveu um concurso para o preenchimento de algumas vagas. Cada candidato realizou três provas: Matemática, Língua Portuguesa e Conhecimentos Gerais.

A média dos candidatos foi calculada considerando-se o seguinte critério: prova de Matemática, peso **4**; prova de Língua Portuguesa, peso **3**; e prova de Conhecimentos Gerais, peso **3**.

Fernando é um dos candidatos. Assim que as notas foram publicadas no Diário Oficial do Município, Fernando resolveu conferir sua média. Veja:

Notas das provas de Fernando

Matemática: 7,5 Língua Portuguesa: 5,0 Conhecimentos Gerais: 6,0

Média obtida por Fernando

$$\frac{\mathbf{4} \times 7{,}5 + \mathbf{3} \times 5{,}0 + \mathbf{3} \times 6{,}0}{\mathbf{4} + \mathbf{3} + \mathbf{3}} = \frac{30 + 15 + 18}{10} = \frac{63}{10} = 6{,}3$$

Dessa forma, Fernando confirmou que sua média foi 6,3.

Situação 2

Durante o último mês, o número de atendimentos diários realizados em um consultório odontológico foi:

6	8	9	9	6
9	10	9	8	9
7	7	6	8	8
10	10	8	6	7

Para determinar a média diária de atendimentos realizados nesse consultório, podemos verificar a quantidade de atendimentos diários e calcular a média. Veja:

- 6 aparece **4** vezes
- 7 aparece **3** vezes
- 8 aparece **5** vezes
- 9 aparece **5** vezes
- 10 aparece **3** vezes

Então:

$$\text{média} = \frac{\mathbf{4} \times 6 + \mathbf{3} \times 7 + \mathbf{5} \times 8 + \mathbf{5} \times 9 + \mathbf{3} \times 10}{\mathbf{4} + \mathbf{3} + \mathbf{5} + \mathbf{5} + \mathbf{3}} =$$

$$= \frac{24 + 21 + 40 + 45 + 30}{20} = \frac{160}{20} = 8$$

Logo, a média diária de atendimentos realizados nesse consultório odontológico foi 8. Toda média calculada como nas duas situações apresentadas é chamada de **média aritmética ponderada**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

21 O quadro abaixo mostra o número de alunos matriculados no 9º ano de uma escola no período de 2006 a 2009. Considere esses dados para responder às questões em seu caderno.

2006	2007	2008	2009
193	209	216	210

a) Quantos alunos foram matriculados no 9º ano dessa escola nesses quatro anos? 828

b) Qual foi o número médio de alunos matriculados nos quatro anos indicados? 207

c) Em que anos o número de matrículas foi inferior à média? Somente em 2006.

22 Num concurso, a prova escrita tem peso 3 e a prova prática tem peso 2. Qual é a média de um candidato que obteve nota 8 na prova escrita e nota 5 na prova prática? 6,8

23 Catarina é professora de Matemática. Ela obtém a média bimestral dos alunos propondo 3 atividades durante o bimestre: a nota da primeira atividade tem peso 1, a da segunda tem peso 2, e a da terceira tem peso 3. Calcule a média bimestral de um aluno de Catarina que obteve 4,0 na primeira atividade, 7,0 na segunda e 8,0 na terceira. 7,0

24 No primeiro trimestre do ano, uma concessionária de automóveis vendeu o número de veículos indicado no quadro:

Janeiro	38	Fevereiro	22	Março	42

Em seu caderno, faça o que se pede.

a) Qual foi o número médio de automóveis vendidos na concessionária nesse trimestre? 34

b) Quantos carros foram vendidos acima da média em março? 8

c) Tomando como base os três primeiros meses, faça uma estimativa de quantos automóveis devem ser vendidos no primeiro semestre do ano. 204

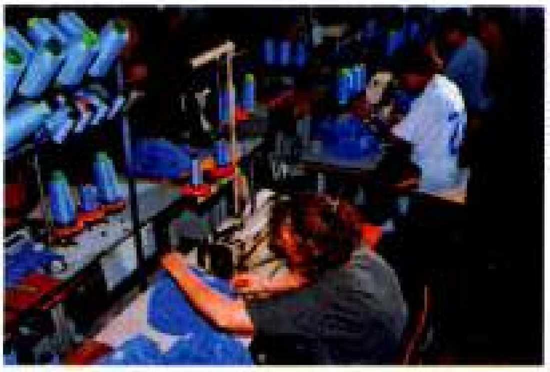
d) Mostre duas formas diferentes de se chegar ao resultado do item anterior.
38 + 22 + 42 + 34 + 34 + 34 ou 34 · 6

25 Uma imobiliária vendeu 5 terrenos a R$ 48.000,00 cada um e 10 terrenos a R$ 45.000,00 cada um.

Qual foi o valor médio dos terrenos vendidos pela imobiliária? R$ 46.000,00

26 O salário mensal, em real, de cada um dos 10 funcionários de uma empresa é:

900	1.350	900	1.050	900
1.020	1.350	1.050	1.050	1.050



DELFIM MARTINS/PULSAR

a) Construa uma tabela de distribuição de frequência para essa situação. construção de tabela

b) Determine o salário modal (moda) desses funcionários. 1.050 reais

c) Quantos funcionários recebem salário mensal igual ao salário modal? 4

d) Calcule o salário mensal médio desses dez funcionários. 1.062 reais

e) Quantos funcionários recebem salário mensal igual ao salário mensal médio? nenhum

27 Uma fábrica decidiu testar a duração média, em hora, de 10 tipos de lâmpadas que produzia, deixando-as acesas até quanto suportassem. Segundo o controle de qualidade dessa fábrica, os modelos que tivessem duração de 20 horas a menos que a média não deveriam mais ser produzidos.

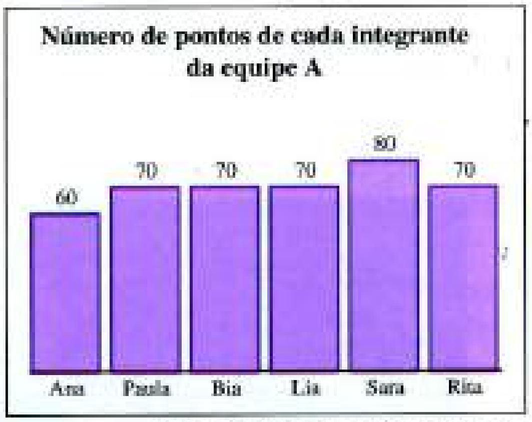
Veja no quadro o número de horas que cada tipo de lâmpada permaneceu acesa nesse teste.

A	240	F	270
B	260	G	225
C	275	H	250
D	258	I	255
E	239	J	219

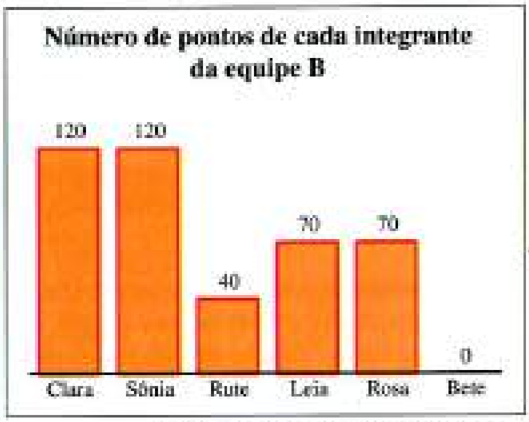
Em seu caderno, responda à questão:
Quais tipos de lâmpadas não deveriam mais ser produzidos?

Pense mais um pouco...

Os gráficos abaixo representam pontos, de 0 a 100, que cada integrante das equipes **A** e **B** obteve na final da competição de saltos ornamentais promovida pelo Clube Esportista.



Dados obtidos pelo Clube Esportista.



Dados obtidos pelo Clube Esportista.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Em seu caderno, responda:

a) Qual é o total de pontos que cada equipe obteve? Equipe A: 420 e equipe B: 420 pontos.

b) De quantos integrantes é composta cada equipe? 6

c) Calcule a média de pontos de cada equipe. Equipe A: 70 e equipe B: 70.

d) Qual equipe obteve maior média? As duas obtiveram médias iguais.

e) Nesse caso, a média aritmética traduz o perfil de cada equipe? Justifique.
Não, pois, no caso da equipe B, a média 70 não deixa claro que Rute, Leia, Rosa e, principalmente, Bete deveriam treinar mais.

Mediana

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

As estaturas, em centímetro, de cinco jogadores de basquete são 177, 185, 175, 195 e 192.

Ordenando essas estaturas, por exemplo, de modo crescente, temos:

175 177 185 192 195

Observe que esse grupo de estaturas é formado por 5 termos que ocupam 5 posições:

1ª posição	2ª posição	3ª posição	4ª posição	5ª posição
175	177	**185**	192	195
2 termos		termo central	2 termos	

JOSÉ MIGUEL GÓMEZ/REUTERS-NEWSCOM

Jogo entre Brasil e Uruguai durante os Jogos Panamericanos de Santo Domingo, na República Dominicana, em 2005.

Como o grupo pesquisado é formado por uma **quantidade ímpar** de termos, existe um termo que divide o grupo em duas partes com a mesma quantidade de termos, ao qual chamamos **termo central**.

Na situação apresentada, o **termo central** ocupa a 3ª posição ordinal, crescente, que corresponde à estatura de 185 cm. Então, dizemos que **185 cm** é a **mediana** do grupo pesquisado.

Situação 2

As notas referentes à avaliação de Língua Inglesa realizada por 8 alunos de uma escola são: 9,5; 5,5; 2,5; 6,0; 5,5; 7,0; 7,5 e 8,0.

Ordenando essas notas de modo crescente, temos:

2,5 5,5 5,5 6,0 7,0 7,5 8,0 9,5

Observe que esse grupo de notas é formado por 8 termos que ocupam 8 posições:

1ª posição	2ª posição	3ª posição	4ª posição	5ª posição	6ª posição	7ª posição	8ª posição
2,5	5,5	5,5	**6,0**	**7,0**	7,5	8,0	9,5
3 termos			termos centrais		3 termos		

Como o grupo pesquisado é formado por uma **quantidade par** de termos, existem **dois termos centrais**.

Na situação apresentada, os termos centrais ocupam a 4ª posição e a 5ª posição ordinais, crescentes.

Nesse caso, para obter a **mediana**, temos de **calcular a média aritmética** desses **dois termos centrais**:

$$\text{média aritmética} = \frac{\underbrace{6{,}0}_{\text{termo da 4ª posição}} + \underbrace{7{,}0}_{\text{termo da 5ª posição}}}{2} = \frac{13{,}0}{2} = 6{,}5$$

Logo, a **mediana** é a nota 6,5.

Mediana de um grupo de valores ordenados, de modo crescente ou decrescente, é o termo que ocupa a posição central (quantidade ímpar de termos) ou é o valor obtido pela média aritmética de seus dois termos centrais (quantidade par de termos).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

28 Nos últimos 5 dias Jair gastou, em real, as quantias abaixo:

25,00 32,00 18,00 40,00 20,00

Em seu caderno, determine o gasto mediano (mediana) que Jair teve nesses 5 dias. R$ 25,00

29 Esta é a relação do salário mensal, em real, de 10 funcionários de uma empresa:

1.024,00	1.224,00	1.220,00
1.024,00	778,00	1.000,00
778,00	624,00	658,00
780,00		

Em seu caderno, determine o salário mediano (mediana) desses funcionários. R$ 890,00

30 Marta registrou o tempo, em minuto, que seus colegas gastam no percurso de casa à escola:

10	120	15	20	30	30	25
60	40	40	50	30	20	15
35	35	20	60	90	90	15

Em seu caderno, determine:

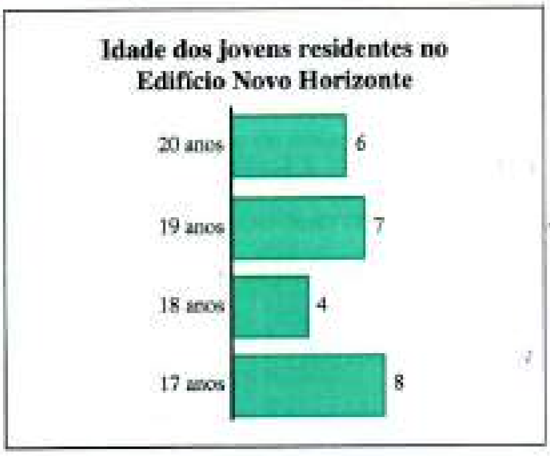
a) a mediana desses valores. 30 min

b) a moda desses valores. 15 min, 20 min e 30 min

c) o tempo médio desse percurso. 40 min

d) Na sua opinião, que medida caracteriza melhor esse grupo de dados? Por quê? resposta pessoal

31 Observe o gráfico e resolva no caderno.



NELSON MATSUDA

Dados obtidos pelo Edifício Novo Horizonte.

a) Quantos jovens residem no edifício? 25 jovens

b) Calcule a idade média desses jovens. 18,44 anos

c) Determine a idade modal desses jovens. 17 anos

d) Calcule a idade mediana desses jovens. 19 anos

e) Se forem acrescentados a esses dados dois jovens de 16 anos, o que acontecerá com cada medida de tendência central calculada anteriormente? A média diminuirá para 18,26 anos, a moda continuará a mesma e a mediana passará a ser 18 anos.

32 O fabricante de chocolate Chocobom realizou uma pesquisa sobre a preferência de 1.500 consumidores em relação a 5 tipos de chocolate. Veja o resultado da pesquisa.

Preferência dos consumidores	
Tipo A	256
Tipo B	470
Tipo C	324
Tipo D	135
Tipo E	315

Dados obtidos pela empresa Chocobom.

Em seu caderno, determine qual das duas medidas de tendência central caracteriza melhor essa pesquisa? Justifique.

Espera-se que o aluno perceba que não faz sentido calcular a média e a mediana para essa pesquisa, por ser uma variável qualitativa. Portanto, devem concluir que a moda é a medida mais adequada para esse caso.

5. Noções de probabilidade

Para arrecadar dinheiro para a formatura, um grupo de alunos resolveu rifar uma televisão. A rifa é composta de 100 nomes, e apenas um nome é o premiado. Qual é a probabilidade de Joana ganhar a TV se ela comprou 5 nomes dessa rifa?

VICENTE MENDONÇA

Você já viu anteriormente que probabilidade é a medida da chance de um evento acontecer, nesse caso, a medida da chance de Joana ganhar a TV.

Essa situação lida com a **incerteza**, pois ao comprar um nome da rifa não é possível saber qual nome é o premiado. Esse tipo de experiência é objeto de estudo da **Teoria das Probabilidades**.

A Teoria das Probabilidades lida com o estudo das leis que regem os fenômenos que dependem do **acaso**, ou seja, aqueles fenômenos cujos resultados não se podem prever. Nesse caso, interessam a essa teoria as **experiências aleatórias**, ou seja, aquelas cujo resultado seja imprevisível, mesmo se forem repetidas sob as mesmas condições.

São exemplos de experiências aleatórias:

- escolher um aluno ao acaso para saber qual o seu time preferido;
- lançar um dado;
- lançar duas moedas;
- retirar uma carta do baralho;
- lançar dois dados e obter a soma de suas faces.

Retornemos ao problema de Joana. Os 100 nomes da rifa formam o **espaço amostral** dessa experiência aleatória.

O espaço amostral (S) de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.

Os cinco nomes da rifa adquiridos por Joana formam um **evento** dessa experiência aleatória.

De forma geral, um evento é todo subconjunto do espaço amostral.

Definidos o espaço amostral e o evento de um experimento aleatório, calculamos a probabilidade da ocorrência desse evento por meio da seguinte razão:

$$\text{Probabilidade de um evento} = \frac{\text{número de casos favoráveis do evento}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

No caso da rifa, temos:

$$\text{Probabilidade de Joana ganhar a TV} = \frac{5}{100} \text{ ou } 0{,}05 \text{ ou } 5\%$$

Veja mais um exemplo:

Qual é a probabilidade de sair a soma 6 no lançamento de dois dados?

Antes de calcularmos a probabilidade, devemos definir o espaço amostral:

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

Observe que os casos favoráveis são:

(1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1)

Desse modo, a probabilidade de sair soma 6 nas faces dos dados é dada pela razão:

$\frac{5}{36} \simeq 0{,}14$ ou $\simeq 14\%$.

OBSERVAÇÕES

- Quando a probabilidade é zero, dizemos que o evento é impossível.
- Quando a probabilidade é 1 ou 100%, dizemos que o evento é certo.

VICENTE MENDONÇA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

33 Em uma urna há 9 bolas pretas, 5 bolas amarelas e 3 bolas vermelhas. Em seu caderno responda: se retirarmos uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de sair uma bola amarela? ≃ 29%

34 A professora irá sortear, ao acaso, um aluno entre os 30 alunos da sala. Sabendo que há 18 meninas na sala, qual é a probabilidade de ser sorteada uma menina? E de ser sorteado um menino? 60%; 40%

35 Considerando o lançamento de dois dados, determine no caderno:

a) a probabilidade de a soma das faces ser 8. ≅ 14%

b) a probabilidade de a soma das faces ser um número par. 50%

c) a probabilidade de a soma das faces ser maior que 10. ≅ 8%

36 Quantos alunos há na sua classe? Quantos são meninos? Calcule, em seu caderno, a probabilidade de que, ao se sortear um aluno ao acaso, esse aluno seja um menino. resposta pessoal

Espera-se que os alunos percebam que basta comparar as possibilidades que Lucas tem de vencer, com as possibilidades de seu desafiante. Lucas tem 11 possibilidades em 36 e seu desafiante tem somente 9 em 36. Com isso, deverão concluir que Lucas tem maior probabilidade de vencer que seu desafiante.

Pense mais um pouco...

Lucas inventou o seguinte jogo com dados: o desafiante lança dois dados, se em pelo menos um dos dados sair o número 1, Lucas ganha o jogo. Se em pelo menos um dos dados sair como menor número o 2 ou o 3, o desafiante lança os dados novamente. E se em pelo menos um dos dados não sair os números 1, 2 ou 3, o desafiante ganha o jogo. Quem tem maior probabilidade de vencer o jogo: Lucas ou seu desafiante?

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

37 O pictograma a seguir mostra a quantidade de CDs vendidos na loja Som Maior durante a primeira semana de julho de 2009.

Dados obtidos pela loja Som Maior, 1ª semana de julho de 2009.

Em seu caderno, faça o que se pede.

a) Construa uma tabela de distribuição de frequência, com a frequência relativa em porcentagem. construção de tabela

b) Sabendo que a meta dessa loja é a venda diária de 100 CDs, em quantos dias a loja vendeu menos que a meta desejada? em 4 dias

38 Foi realizada uma pesquisa sobre o tempo que os 140 trabalhadores de uma empresa gastam no percurso entre a residência e o trabalho. Para tanto, foram selecionados, de modo imparcial, 40 trabalhadores.

Tempo gasto pelos trabalhadores (em minuto)

20	20	25	10	15	60
20	100	25	25	20	15
30	60	20	100	90	60
90	90	20	15	30	100
20	60	20	30	35	35
35	100	40	35	30	30
30	40	40	100		

Em seu caderno, faça o que se pede.

a) Construa uma tabela de distribuição de frequência, mostrando a frequência relativa em porcentagem. construção de tabela

b) Calcule a média aritmética, a moda e a mediana do tempo gasto por esses trabalhadores. média: 43,5 min; moda: 20 min; mediana: 30 min

c) Qual é a probabilidade de sortearmos, ao acaso, um trabalhador que gasta 90 minutos no percurso entre a residência e o trabalho? 7,5%

39 Leia o texto e responda no caderno.

(Ceeteps-SP) Foi pedido a todos os jovens inscritos no Enem 2003 que respondessem a um questionário com 188 questões sobre seus professores, escolas, interesses, modo de vida, hábitos de leitura, família. 1,3 milhão responderam. Então, cruzaram-se as respostas fornecidas com o resultado de cada aluno nas provas de conhecimentos gerais e de redação. Ao relacionar as áreas de interesses dos jovens com o desempenho escolar, foram obtidos os dados na tabela a seguir:

ILUSTRAÇÕES: PAULO MANZI

OS INTERESSES

COMO AFETAM O DESEMPENHO	OPINIÃO (%)	MÉDIA PROVA OBJETIVA
Política de sua cidade (prefeitos, vereadores)		
Muito interesse	39,94	48,85
Pouco interesse	49,59	50,64
Nenhum interesse	10,1	48,08
Política nacional (deputados, senadores e presidente)		
Muito interesse	33,48	54,34
Pouco interesse	53	48,33
Nenhum interesse	11,61	42,19
Política de outros países		
Muito interesse	18,09	59,46
Pouco interesse	57,03	49,93
Nenhum interesse	23,52	41,52
Esportes		
Muito interesse	42,25	50,29
Pouco interesse	42,18	49,58
Nenhum interesse	13,86	48,15
Artes, teatro, cinema		
Muito interesse	36,28	53,43
Pouco interesse	49,27	48,28
Nenhum interesse	13,02	44,54

Dados obtidos em: *Folha de S.Paulo*. São Paulo, 19 jul. 2004.

Os dados apresentados na tabela indicam:

I. Os que manifestaram muito interesse pela política nacional (papel dos deputados e senadores, presidente da República) obtiveram um desempenho melhor do que aqueles que declararam nenhum interesse.

II. Os estudantes que se manifestaram por muito interesse na política de outros países apresentaram uma performance na prova inferior aos que declararam muito interesse na política nacional.

III. Menos de 20% dos estudantes manifestaram nenhum interesse pela política de sua cidade (prefeito, vereadores).

Estão corretas somente: alternativa c

a) I
b) II
c) I e III
d) I e II
e) II e III

40 A tabela abaixo mostra a idade das pessoas que se associaram a uma biblioteca pública durante o mês de julho.

Idade (em anos)	Número de pessoas
14	30
16	7
18	2
20	10
21	12
27	18
30	21

Faça o que se pede no caderno:

a) Calcule a idade média dessas pessoas. 21,36 anos

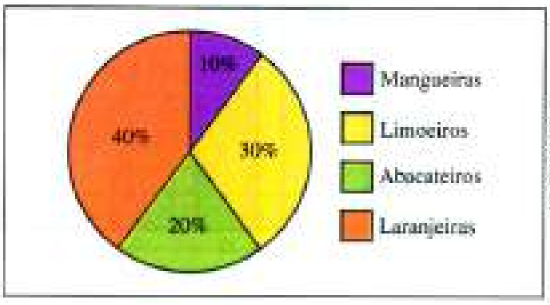
b) Determine a idade modal e a idade mediana. idade modal: 14 anos; idade mediana: 21 anos

c) Construa um gráfico de colunas para essa situação. construção de gráfico

d) Qual é a probabilidade de sortearmos, ao acaso, um sócio que tenha mais de 21 anos? 39%

41 Leia, interprete os dados apresentados no gráfico e faça os cálculos no caderno.

(Saresp) Em uma chácara, há um total de 350 árvores frutíferas, assim distribuídas:



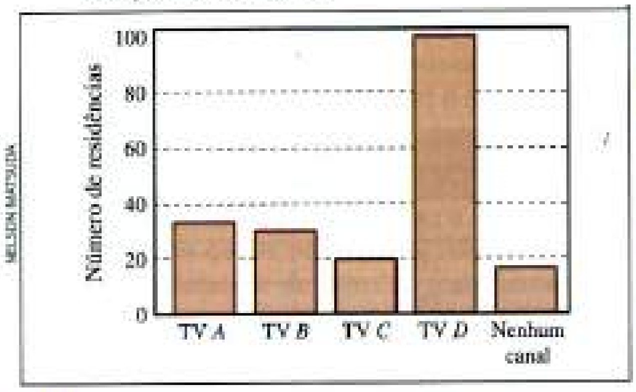
NELSON MATSUDA

As quantidades de laranjeiras e mangueiras são, respectivamente: alternativa a

a) 140 e 35
b) 140 e 70
c) 140 e 105
d) 105 e 70

O texto e o gráfico a seguir referem-se aos testes 42 e 43. Leia o texto e resolva no caderno.

(Enem-MEC) Uma pesquisa de opinião foi realizada para avaliar os níveis de audiência de alguns canais de televisão, entre 20 h e 21 h, durante uma determinada noite.
Os resultados obtidos estão representados no gráfico a seguir.



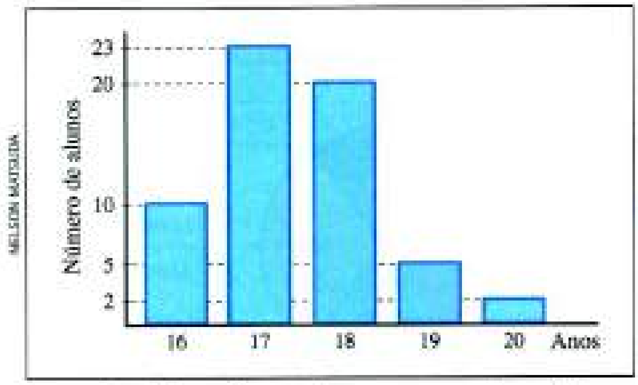
42 (Enem-MEC) O número de residências atingidas nessa pesquisa foi aproximadamente de: alternativa d

a) 100 **c)** 150 **e)** 220
b) 135 **d)** 200

43 (Enem-MEC) A porcentagem de entrevistados que declararam estar assistindo à TV *B* é aproximadamente igual a: alternativa a

a) 15% **c)** 22% **e)** 30%
b) 20% **d)** 27%

44 Interprete os dados apresentados no gráfico e responda à questão no caderno.
(Fuvest-SP) A distribuição das idades dos alunos de uma classe é dada pelo seguinte gráfico:



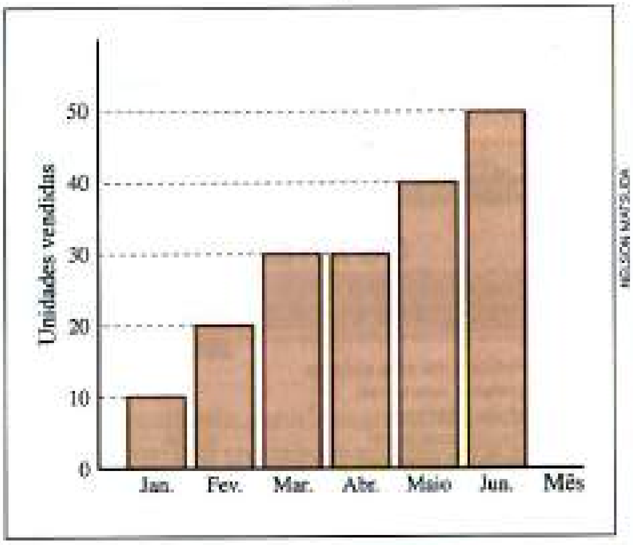
Qual das alternativas representa melhor a média da idade dos alunos? alternativa c

a) 16 anos e 10 meses
b) 17 anos
c) 17 anos e 5 meses
d) 18 anos e 6 meses
e) 19 anos e 2 meses

45 Resolva no caderno.
(Fuvest-SP) Sabe-se que a média aritmética de cinco números inteiros distintos, estritamente positivos, é 16. O maior valor que um desses inteiros pode assumir é: alternativa d

a) 16 **d)** 70
b) 20 **e)** 100
c) 50

46 Copie a afirmativa correta em seu caderno.
(Univali-SC) O gráfico mostra as vendas de televisores em uma loja.



Pode-se afirmar que: alternativa d

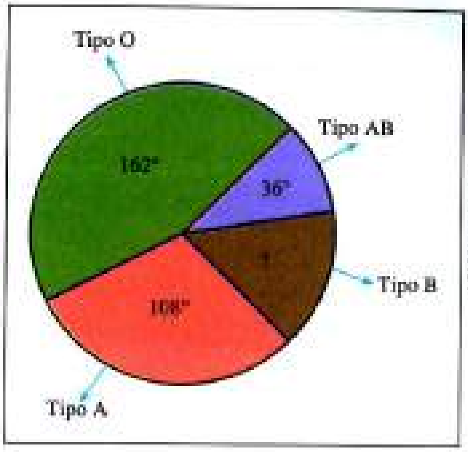
a) as vendas aumentaram mês a mês.
b) foram vendidos 100 televisores até junho.
c) as vendas do mês de maio foram inferiores à soma das vendas de janeiro e fevereiro.
d) foram vendidos 90 televisores até abril.
e) se cada televisor é vendido por R$ 240,00, em maio a loja faturou, com vendas deste produto, R$ 7.200,00.

47 Faça os cálculos no caderno.
(PUC-MG) Em uma pesquisa eleitoral para verificar a posição de três candidatos a prefeito de uma cidade, 1.500 pessoas foram consultadas. Se o resultado da pesquisa deve ser mostrado em três setores circulares de um mesmo disco e certo candidato recebeu 350 intenções de voto, qual é o ângulo central correspondente a esse candidato? alternativa e

a) 42° **d)** 242°
b) 168° **e)** 84°
c) 90°

48 Resolva em seu caderno.

(UFMS) Um grupo de alunos fez uma pesquisa sobre o tipo de sangue dos 540 alunos da escola. Os alunos, para resumirem os dados encontrados, construíram um gráfico de setores e, no lugar das porcentagens, eles indicaram os ângulos de alguns desses setores, como mostra o gráfico:



Pode-se afirmar que o número de alunos que têm o tipo B é: alternativa b

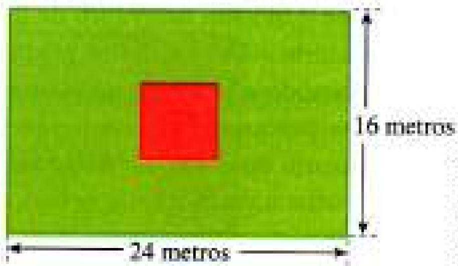
a) 96 c) 108 e) 162
b) 81 d) 124

49 Resolva o problema em seu caderno.

(UFMS) Uma empresa tem 18 funcionários. Um deles pede demissão e é substituído por um funcionário de 22 anos de idade. Com isso, a média das idades dos funcionários diminui 2 anos. A idade do funcionário que se demitiu é: alternativa e

a) 50 anos b) 48 anos c) 54 anos d) 56 anos e) 58 anos

50 Um paraquedista precisa pousar em uma região quadrada localizada em um terreno retangular, conforme o esquema ao lado. Sabendo que o lado da região quadrada mede 8 metros e que o paraquedista certamente pousará no terreno retangular, calcule no caderno a probabilidade de o paraquedista pousar na região quadrada. ≃ 17%



51 Copie a afirmação correta em seu caderno.

(Enem – MEC) O gráfico abaixo mostra a área desmatada da Amazônia, em km², a cada ano, no período de 1988 a 2008.

Fonte: MMA.

As informações do gráfico indicam que: alternativa d

a) o maior desmatamento ocorreu em 2004.
b) a área desmatada foi menor em 1997 que em 2007.
c) a área desmatada a cada ano manteve-se constante entre 1998 e 2001.
d) a área desmatada por ano foi maior entre 1994 e 1995 que entre 1997 e 1998.
e) o total de área desmatada em 1992, 1993 e 1994 é maior que 60.000 km².

52 Resolva o problema no caderno.

Na classe de Danilo foi feita uma pesquisa para saber que tipo de peça de teatro os alunos mais gostam. O resultado dessa pesquisa está representado na tabela abaixo:

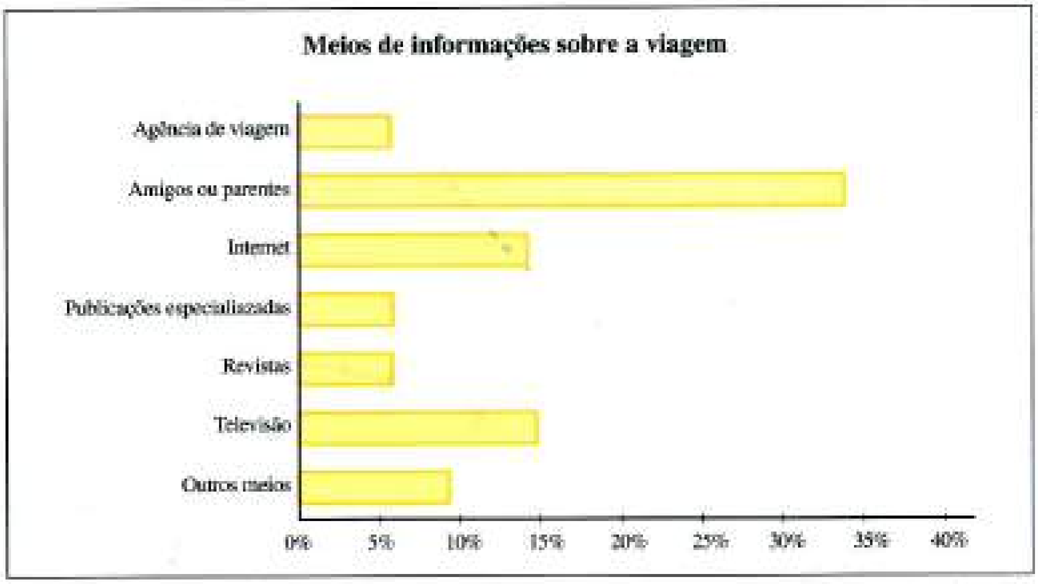
Preferência dos alunos	
Tipo de peça de teatro	**Frequência absoluta**
Comédia	12
Musical	13
Drama	5

Dados obtidos pela escola Nova Geração.

No final do ano, nessa classe será sorteado um aluno que ganhará um ingresso para uma peça musical. De acordo com a tabela, é mais provável que o aluno sorteado prefira ou não prefira musical? Justifique sua resposta usando probabilidade. É mais provável que o aluno sorteado não prefira musical, pois a probabilidade é de aproximadamente 57%.

53 Responda em seu caderno.

(Etec – SP) Em dezembro de 2002, a Empresa Brasileira de Turismo (Embratur) apresentou um relatório sobre o turismo praticado em ambientes naturais conservados, que são aqueles que têm garantida a proteção de seus recursos naturais originais. Para a elaboração do relatório, foi feita uma pesquisa com frequentadores de algumas dessas unidades de conservação. Após o levantamento dos dados, construiu-se um gráfico referente aos meios de informação que levaram os turistas a escolher um desses ambientes naturais conservados para a sua viagem de férias.



Disponível em: http://institucional.turismo.gov.br Acesso em: 15 jul. 2007.

Analisando o gráfico, pode-se dizer que: alternativa d

a) mais da metade dos pesquisados obtiveram a informação por intermédio de amigos ou parentes.

b) agências de viagens e revistas juntas tiveram, percentualmente, mais influência na decisão do que a internet.

c) a influência de amigos e parentes é o triplo da influência de publicações especializadas.

d) menos de um quinto dos pesquisados obtiveram informações via televisão.

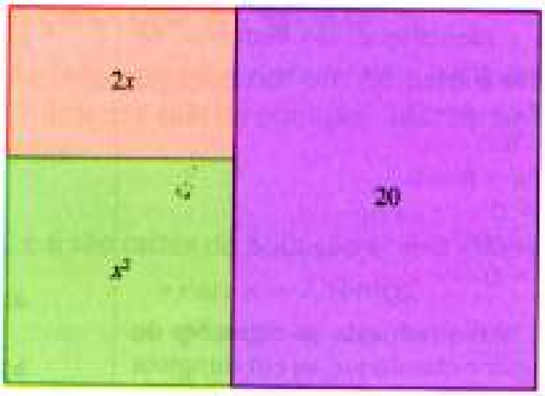
e) a maioria dos pesquisados obtiveram a informação via internet.

CAPÍTULO

4 Equações do 2º grau

1. Conhecendo equações do 2º grau com uma incógnita

Considere a figura a seguir, cuja área total é 35, em uma certa unidade de área.



NELSON MATSUDA

A soma das áreas de suas partes é dada por $x^2 + 2x + 20$ e, portanto:

$$x^2 + 2x + 20 = 35 \quad \text{ou} \quad x^2 + 2x - 15 = 0$$

Observe que a equação obtida, $x^2 + 2x - 15 = 0$, tem uma só incógnita (a letra x) cujo maior expoente é 2. Ela é um exemplo de **equação do 2º grau com uma incógnita**.

Toda equação do 2º grau com uma incógnita pode ser reduzida à seguinte forma:

$$\underbrace{ax^2 + bx + c = 0}_{\text{Forma reduzida de uma equação do 2º grau}} \text{ (com } a \neq 0\text{)}$$

Os números reais a, b e c são os coeficientes da equação do 2º grau, sendo:

- ***a*** o coeficiente do quadrado da incógnita (coeficiente de x^2);
- ***b*** o coeficiente da incógnita (coeficiente de x);
- ***c*** o termo independente da incógnita.

Nos exemplos a seguir, as equações do 2º grau estão escritas na forma reduzida. Nelas, destacamos os coeficientes *a*, *b* e *c*.

a) Na equação $5x^2 - 6x + 1 = 0$, temos: $a = 5$, $b = -6$ e $c = 1$

b) Na equação $4x^2 + 9x = 0$, temos: $a = 4$, $b = 9$ e $c = 0$

c) Na equação $2x^2 - 10 = 0$, temos: $a = 2$, $b = 0$ e $c = -10$

d) Na equação $-5x^2 = 0$, temos: $a = -5$, $b = 0$ e $c = 0$

Uma equação do 2º grau é chamada de **completa** quando os coeficientes *b* e *c* são diferentes de zero e é chamada de **incompleta** quando $b = 0$ ou $c = 0$, ou ainda, $b = 0$ e $c = 0$.

Nos exemplos acima, o item **a** apresenta uma equação completa e os itens **b**, **c** e **d** apresentam equações incompletas do 2º grau.

2. a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ b) $x^2 + 4x - 3 = 0$ c) $y^2 - 8y = 0$ d) $-5x^2 - 30x - 40 = 0$ e) $3x^2 - 10x + 2 = 0$ f) $x^2 - 6x - 4 = 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Verifique quais das equações seguintes são do 2º grau e identifique, no caderno, os coeficientes *a*, *b* e *c*. a, d, e, f

a) $8x^2 + 17x + 4 = 0$ $a = 8; b = 17; c = 4$

b) $3x - 5 = 0$

c) $0x^2 + 10x - 8 = 0$

d) $y^2 - 25 = 0$ $a = 1; b = 0; c = -25$

e) $4y^2 - 5y = 0$ $a = 4; b = -5; c = 0$

f) $-9 + x^2 = 0$ $a = 1; b = 0; c = -9$

2 Coloque na forma reduzida as equações do 2º grau a seguir e classifique-as em completa ou incompleta.

a) $2x^2 - 5x = -2$ completa

b) $x^2 + 6x = 2x + 3$ completa

c) $y^2 = 8y$ incompleta

d) $-5x^2 = 30x + 40$ completa

e) $3x \cdot (x - 2) = 2 \cdot (2x - 1)$ completa

f) $(x + 4) \cdot (x - 5) = 5x - 16$ completa

3 Dados os coeficientes *a*, *b* e *c*, escreva, em seu caderno, as equações do 2º grau correspondentes.

a) $a = 5$; $b = -7$; $c = 0$ $5x^2 - 7x = 0$

b) $a = -1$; $b = 3$; $c = -4$ $-x^2 + 3x - 4 = 0$

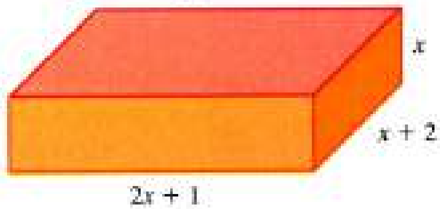
c) $a = 2$; $b = 0$; $c = 4$ $2x^2 + 4 = 0$

d) $a = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{5}{7}$; $c = \sqrt{2}$ $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{7}x + \sqrt{2} = 0$

4 Determine os valores de *m* na equação $(m + 3)x^2 - (2m - 1)x + m + 4 = 0$ de modo que ela seja do 2º grau. $m \neq -3$

5 Para que valor de *n* a equação $(5n + 2)x^2 - 4nx + n = 0$ não é do 2º grau? $-\frac{2}{5}$

6 A figura abaixo representa uma caixa na forma de paralelepípedo.



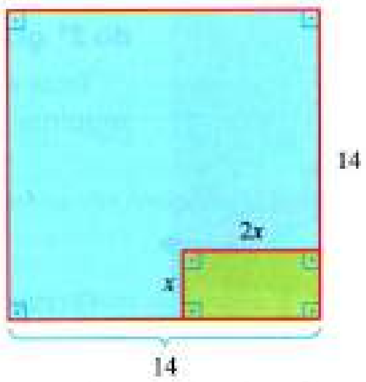
NELSON MATSUDA

a) Determine a expressão da soma das áreas das faces laterais. $6x^2 + 6x$

b) Determine a expressão da área da face destacada em vermelho. $2x^2 + 5x + 2$

c) Se a soma das áreas das faces laterais for 880, determine a equação correspondente. $6x^2 + 6x - 880 = 0$

7 Considere a figura abaixo e faça o que se pede em seu caderno.



NELSON MATSUDA

a) Encontre a área da parte azul. $A = 196 - 2x^2$

b) Calcule o valor de *x* quando a área azul for 124. $x = 6$

8 Sendo x um número desconhecido, vamos representar com símbolos a sentença:

"o quadrado de um número somado com o seu triplo é igual a dezoito"

$$\underbrace{\text{o quadrado de um número}}_{x^2}\ \underbrace{\text{somado com}}_{+}\ \underbrace{\text{o seu triplo}}_{3x}\ \underbrace{\text{é igual a}}_{=}\ \underbrace{\text{dezoito}}_{18}$$

Na forma reduzida, escrevemos: $x^2 + 3x - 18 = 0$

Represente o número desconhecido por x e escreva, em seu caderno, a equação do 2º grau na forma reduzida que traduz as seguintes sentenças:

a) O quadrado de um número somado com o dobro desse número é igual a 99. $x^2 + 2x - 99 = 0$

b) O triplo do quadrado de um número menos o próprio número é igual a 30. $3x^2 - x - 30 = 0$

c) Um número é igual ao quadrado desse próprio número menos 42. $x^2 - x - 42 = 0$

d) Três quintos do quadrado de um número é igual a esse número menos 40. $\frac{3}{5}x^2 - x + 40 = 0$

9 No caderno, elabore um problema que possa ser resolvido por meio da equação $x^2 + x + 5 = 0$. resposta pessoal

10 Desenhe, no caderno, um retângulo cuja área é dada pela seguinte equação: construção de figura

a) $x^2 + x = 0$ b) $x^2 - 1 = 0$ c) $x^2 = 0$ d) $x^2 + 2x + 1 = 0$

- Há uma única maneira de desenhar esses retângulos? Troque ideias com um colega e justifiquem a resposta. Espera-se que o aluno perceba que há mais de um modo de desenhar cada retângulo.

2. Raízes de uma equação do 2º grau

Quando substituímos a incógnita de uma equação por um número e encontramos uma sentença verdadeira, dizemos que esse número é **raiz** da equação. Se a equação for do 2º grau, ela pode ter até duas raízes reais diferentes.

Veja os exemplos.

a) Verificar se os números -3, -2, 2 e 6 são raízes da equação $x^2 + x - 6 = 0$.

- Para $x = -3$, temos:

$(-3)^2 + (-3) - 6 = 0$

$9 - 3 - 6 = 0$

$9 - 9 = 0$ (verdadeira)

Logo, -3 é raiz da equação.

- Para $x = -2$, temos:

$(-2)^2 + (-2) - 6 = 0$

$4 - 2 - 6 = 0$

$4 - 8 = 0$ (falsa)

Logo, -2 não é raiz da equação.

- Para $x = 2$, temos:

$2^2 + 2 - 6 = 0$

$4 + 2 - 6 = 0$

$6 - 6 = 0$ (verdadeira)

Logo, 2 é raiz da equação.

- Para $x = 6$, temos:

$6^2 - 6 - 6 = 0$

$36 = 0$ (falsa)

Logo, 6 não é raiz da equação.

b) Determinar m na equação $(3m - 1) \cdot x^2 - (m + 8) \cdot x + 10 = 0$ de modo que uma de suas raízes seja 2.

Como 2 deve ser raiz da equação, temos:

$(3m - 1) \cdot 2^2 - (m + 8) \cdot 2 + 10 = 0$

$(3m - 1) \cdot 4 - (m + 8) \cdot 2 + 10 = 0$

$12m - 4 - 2m - 16 + 10 = 0$

$10m - 10 = 0$

$\frac{10m}{10} = \frac{10}{10}$

$m = 1$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

11 Observe o diálogo entre Júlia e Dora e responda à questão em seu caderno.

JOSÉ LUIS JUHAS

O que Júlia respondeu para Dora?
...substituir x por 7; se a sentença obtida for falsa, 7 não é raiz dessa equação.

12 Verifique, entre os números 2, -5, 9 e 10, quais são raízes da equação $x^2 - 11x + 18 = 0$. 2 e 9

13 Verifique, no caderno, se o número 5 é raiz das equações:

a) $x^2 + 6x = 0$ não
b) $2x^2 - 10x = 0$ sim
c) $3x^2 - 75 = 0$ sim
d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ sim

14 Dois dos números -10, $-\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$ e 10 são raízes da equação $x^2 - 10 = 0$. Quais são eles? Responda no caderno. $-\sqrt{10}$ e $\sqrt{10}$

15 Calcule q de modo que -1 seja raiz da equação $(3q - 2) \cdot x^2 + (2q - 1) \cdot x + 5 = 0$. Escreva a resposta no caderno. $q = -4$

16 Calcule em seu caderno:

a) o valor de p na equação $3x^2 - 14x + 2p = 0$ para que uma das raízes seja 4. $p = 4$
b) o valor de m na equação $2x^2 + mx - 2 = 0$ para que uma das raízes seja -2. $m = 3$
c) o valor de k na equação $(k - 3)x^2 - (k + 4)x + 6 = 0$ para que uma das raízes seja 2. $k = 7$

3. Resolvendo equações do 2º grau

Vamos apresentar a resolução de algumas equações do 2º grau.

Equação do 2º grau que pode ser reduzida à forma $ax^2 + bx = 0$

Considere a equação $5x^2 + 6x = 0$. Ela é uma equação do 2º grau incompleta.

Podemos fatorar o primeiro membro dessa equação colocando x em evidência:

$x \cdot (5x + 6) = 0$

Sabemos que o produto de dois números reais é zero somente se um dos fatores for zero, então:

O produto de x por $(5x + 6)$ é 0 quando $x = 0$ ou $5x + 6 = 0$.

Resolvendo a equação $5x + 6 = 0$, encontramos $x = -\frac{6}{5}$.

Portanto, as raízes da equação $5x^2 + 6x = 0$ são $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{6}{5}$.

Toda equação do 2º grau do tipo $ax^2 + bx = 0$ tem duas raízes reais, sendo que uma delas é nula.

Veja outro exemplo.

Vamos resolver a equação $4x^2 + 2x = 0$. Fatorando o primeiro membro dessa equação, colocando x em evidência, temos:

$2x(2x + 1) = 0$

Se o produto de dois ou mais fatores que representam números reais é igual a zero, obrigatoriamente um deles deve ser igual a zero. Então:

$$\begin{array}{ll} 2x + 1 = 0 & \qquad 2x = 0 \\ 2x = -1 & \qquad x = 0 \\ x = -\dfrac{1}{2} & \end{array}$$

Assim, a equação tem duas soluções. Indicando essas soluções por x_1 e x_2, temos $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Equação do 2º grau que pode ser reduzida à forma $(mx + n)^2 = 0$

Considere a equação $x^2 - 12x + 36 = 0$. Ela é uma equação do 2º grau completa.

Observe que o 1º membro dessa equação é um **trinômio quadrado perfeito**:

$$\underbrace{x^2}_{(x)^2} - \underbrace{12x}_{-2 \cdot x \cdot 6} + \underbrace{36}_{(6)^2} = (x - 6)^2$$

Então, podemos escrever: $(x - 6)^2 = 0$.

Uma potência é nula somente se a base for zero. Logo, devemos ter:

$$x - 6 = 0, \quad \text{ou seja,} \quad x = 6$$

Nesse caso, dizemos que a equação tem duas raízes iguais, ou seja, $x_1 = x_2 = 6$.

> Toda equação do 2º grau do tipo $(mx + n)^2 = 0$, com m e n reais, tem duas raízes reais e iguais.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

17 Resolva as equações em seu caderno.

a) $3x^2 + 15x = 0$ $x_1 = 0$ e $x_2 = -5$

b) $2y^2 - \frac{y}{3} = 0$ $y_1 = 0$ e $y_2 = \frac{1}{6}$

c) $9 \cdot (2n - 5) \cdot (n + 2) = 0$ $n_1 = \frac{5}{2}$ e $n_2 = -2$

d) $\frac{2x - 3}{x - 6} = \frac{3x - 1}{x - 2}$ $(x \neq 6$ e $x \neq 2)$ $x_1 = 0$ e $x_2 = 12$

18 Encontre as soluções das equações e responda à questão em seu caderno.

a) $5x^2 + 12x = 0$ 0 e $-\frac{12}{5}$

b) $-3y^2 = 6y$ 0 e -2

c) $\sqrt{3}\,x^2 + x = 0$ 0 e $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $(m + 3) \cdot (m - 6) = -18$ 0 e 3

- O que essas equações têm em comum?

18. São equações do 2º grau incompletas, com duas raízes reais, uma delas sendo zero.

19 Invente um problema que seja resolvido por uma equação do 2º grau em que uma de suas soluções seja igual a zero. Depois, troque seu problema com o de um colega e resolva o problema criado por ele. Após ambos resolverem os problemas, confiram as resoluções. resposta pessoal

20 Calcule p na equação $x^2 - 6x + p + 5 = 0$ de modo que uma das raízes seja nula. $p = -5$

21 O dobro do quadrado de um número negativo somado ao triplo dele é igual a zero. Determine esse número. $-\frac{3}{2}$

22 Resolva as equações em seu caderno.

a) $x^2 - 14x + 49 = 0$ $x_1 = x_2 = 7$

b) $4x^2 - 20x + 25 = 0$ $x_1 = x_2 = \frac{5}{2}$

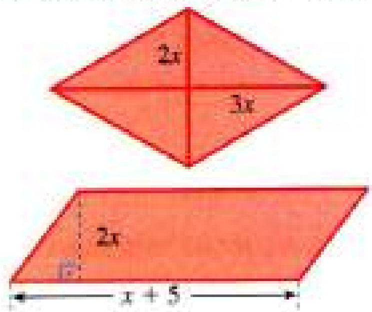
c) $4y^2 = 4y - 1$ $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$

d) $p^2 + 6p = 16p - 25$ $p_1 = p_2 = 5$

23 Se do quadrado da idade de Luísa subtrairmos o dobro da idade dela, obteremos 10 vezes a idade de Lúcia, a irmã gêmea de Luísa. Qual é a idade de Luísa? Responda em seu caderno. 12 anos

24 Elabore em seu caderno um problema que possa ser resolvido por uma equação do 2º grau que tem duas raízes reais e iguais. resposta pessoal

25 Para que valor de x o losango e o paralelogramo abaixo têm a mesma área? $x = 1$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Equação do 2º grau que pode ser reduzida à forma $ax^2 + c = 0$

Vamos resolver a equação $x^2 - 25 = 0$.

Trata-se de uma equação incompleta do 2º grau com $b = 0$, ou seja, é do tipo $ax^2 + c = 0$.

Isolando a incógnita no 1º membro, temos:

$$x^2 - 25 = 0$$
$$x^2 = 25$$

Existem dois valores de x que verificam essa equação. São eles -5 e $+5$, pois $(-5)^2 = 25$ e $(+5)^2 = 25$. Em vista disso, prosseguiremos a resolução da equação, escrevendo:

$$x = \pm\sqrt{25}$$
$$x = \pm 5$$

Logo, as raízes dessa equação são $x_1 = -5$ e $x_2 = 5$.

Quando uma equação do 2º grau da forma $ax^2 + c = 0$ admitir raízes reais, elas serão opostas.

Veja mais exemplos.

a) Resolver a equação $x^2 - 1 = 8{,}61$

$$x^2 - 1 = 8{,}61$$
$$x^2 = 8{,}61 + 1$$
$$x^2 = 9{,}61$$
$$x = \pm\sqrt{9{,}61}$$
$$x = \pm 3{,}1$$

Logo, as raízes são $x_1 = -3{,}1$ e $x_2 = 3{,}1$.

b) Resolva a equação $x^2 + 9 = 0$.

$x^2 + 9 = 0$

$x^2 = -9$

Como não existe número real que, elevado ao quadrado, resulta em -9, essa equação não tem raiz real.

c) Luís tem um terreno na forma de um quadrado. Ele pretende comprar um terreno de 90 m² que faz divisa com o que ele já possui. Desse modo, ele ficaria com um terreno retangular de 414 m². Qual é a medida do lado do terreno de formato quadrado de Luís?

Considerando o esquema a seguir como uma representação do novo terreno de Luís, temos:

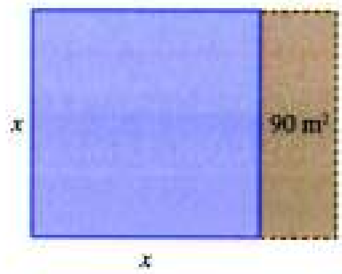
$x^2 + 90 = 414$

$x^2 = 414 - 90$

$x^2 = 324$

$x = \pm\sqrt{324}$

$x = \pm 18$



Como a medida do lado deve ser um número positivo, o lado do terreno de formato quadrado de Luís mede 18 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

26 Escreva as seguintes equações na forma reduzida. Depois, resolva-as, em seu caderno.

a) $(3y - 4) \cdot (3y + 1) = 14 - 9y$ $y_1 = -\sqrt{2}$ e $y_2 = \sqrt{2}$

b) $(m + 5) \cdot (m - 4) = m + 16$ $m_1 = -6$ e $m_2 = 6$

c) $8x = \dfrac{1}{2x}$ $(x \neq 0)$ $x_1 = -\dfrac{1}{4}$ e $x_2 = \dfrac{1}{4}$

27 Determine os valores de x que verificam estas equações:

a) $x^2 - 100 = 0$ -10 e 10

b) $4x^2 = 9$ $-\dfrac{3}{2}$ e $\dfrac{3}{2}$

c) $(2x - 1) \cdot (x + 2) = 3x - 7x^2$ $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ e $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

d) $x + 10 = \dfrac{8x}{x - 2}$ $(x \neq 2)$ $-2\sqrt{5}$ e $2\sqrt{5}$

- O que podemos afirmar sobre as raízes dessas equações? Que são opostas.

28 Encontre mentalmente as raízes reais das equações:

a) $-\dfrac{7x^2}{3} = 0$ $x = 0$

b) $x^2 = \dfrac{9}{4}$ $x_1 = \dfrac{3}{2}$ e $x_2 = -\dfrac{3}{2}$

c) $-4x^2 + 2 = +2$ $x = 0$

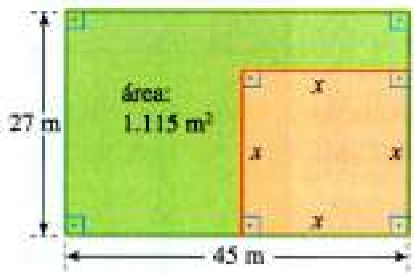
d) $2x^2 = 1$ $x_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ $x_2 = -\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

29 Pensei em um número, elevei-o ao quadrado, subtraí 60 e obtive 840.

a) Se eu pensei em um número positivo, em que número pensei? 30

b) E se pensei em um número negativo, qual é esse número? -30

30 Considere a figura abaixo.



Em seu caderno, faça o que se pede.

a) Escreva uma equação que represente a área da figura colorida de verde. $x^2 = 45 \cdot 27 - 1.115$ (possível resposta)

b) Quais as raízes dessa equação? -10 e 10

c) Determine a medida x do lado do quadrado. 10 m

Pense mais um pouco...

Em seu caderno, descubra o valor de x no quadrado mágico e encontre o valor da soma das colunas, das linhas e das diagonais.

Lembre-se de que a soma das colunas, das linhas e das diagonais em um quadrado mágico é sempre a mesma. $x = 4$; soma = 30

$2x^2 - 20$ 12	3	$x^2 - 1$ 15
$3x + 1$ 13	$2x + 2$ 10	7
5	$\frac{x^2}{2} + 9$ 17	$2x$ 8

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

33. c) $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{7}}$ e $x_2 = \sqrt{\frac{2}{7}}$

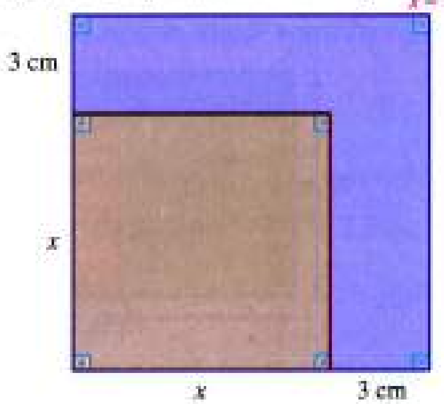
31 Determine o valor de k na equação $(k + 5)x^2 + (k - 1)x + k = 0$ de modo que ela seja do 2º grau. $k \neq -5$

32 Determine o valor de p na equação $2x^2 - 12x + p - 1 = 0$ para que uma das raízes seja -3. $p = -53$

33 Escreva as equações seguintes na forma reduzida e encontre as raízes de cada uma.

a) $(1 - x) \cdot (5 + 2x) = 5$ $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{3}{2}$
b) $(3y - 5) \cdot (y - 5) + y^2 = 0$ $y_1 = y_2 = \frac{5}{2}$
c) $(-2x - 1) \cdot (x - 2) = 3x + 5x^2$
d) $5x^2 + 7 = 2x^2 - 5$ Não tem raiz real.

34 Na figura abaixo, qual deve ser o valor de x para que a área pintada de azul seja 57 cm²? $x = 8$ cm



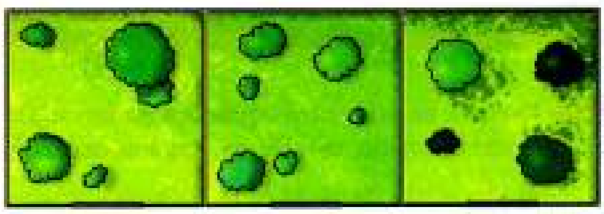
NELSON MATSUDA

35 Dada a equação $x^2 - (m - 5) \cdot x + (1 - m) = 0$, determine m de modo que:

a) uma das raízes seja nula; $m = 1$
b) as raízes sejam opostas. $m = 5$

36 Determine os números reais que são soluções da equação $x^2 + 10x = 11x$. $x = 1$ ou $x = 0$

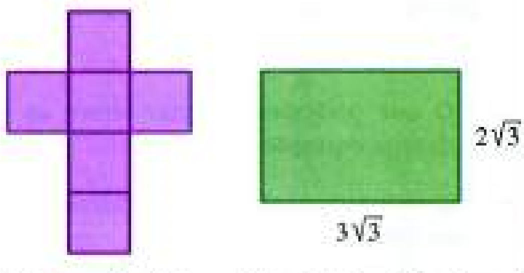
37 A soma das áreas de três terrenos quadrados de mesmo tamanho é igual à área de um campo de futebol com 80 m por 60 m.



JOSÉ LUIS JUHAS

a) Escreva a equação que corresponde a essa situação. $3x^2 = 4\,800$
b) Quais são as raízes dessa equação? -40 e 40
c) Qual dessas raízes representa a medida do lado de cada terreno quadrado? 40

38 Observe as figuras:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

A área da figura lilás é igual à área do retângulo. Qual é a medida da altura da figura lilás? $4\sqrt{3}$

4. Resolvendo equações do 2º grau completando quadrados

As equações do 2º grau já eram resolvidas pelos babilônios por volta do ano 1800 a.C., os quais usavam métodos de completar quadrados associados a tábuas de quadrados. Esse método também era utilizado pelos matemáticos hindus, como Brahmagupta (598-670). Vamos estudar mais profundamente esse procedimento geométrico.

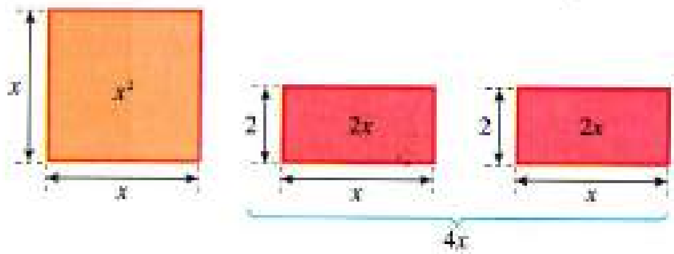
Tábua babilônica BM 13901 (1800 a.C.). Nesta tábua há 24 problemas que envolvem equações do 2º grau.

Acompanhe a resolução da equação $x^2 + 4x - 21 = 0$.

Note que a expressão do primeiro membro não é um trinômio quadrado perfeito, mas podemos transformá-la para que o seja. Para isso, primeiro somamos 21 aos dois membros da equação. Assim temos:

$$x^2 + 4x = 21$$

Em seguida, representamos geometricamente cada termo do primeiro membro:



Agora, tentamos montar um quadrado com as figuras obtidas (Figura 1).

Observe que a área que falta para completar um quadrado perfeito é 2^2 (Figura 2).

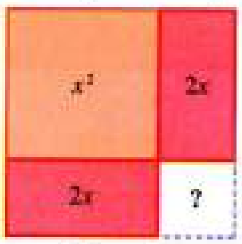


Figura 1

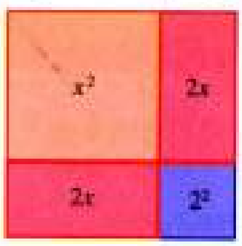


Figura 2

Dessa forma, devemos somar 2^2 ao primeiro membro para formar o trinômio quadrado perfeito. Para não alterar a equação, devemos somar 2^2 ao segundo membro também. Daí, temos:

$$x^2 + 4x + 2^2 = 21 + 2^2$$

Fatorando o trinômio quadrado perfeito no primeiro membro, temos:

$$(x + 2)^2 = 25$$

$$x + 2 = \pm\sqrt{25}$$

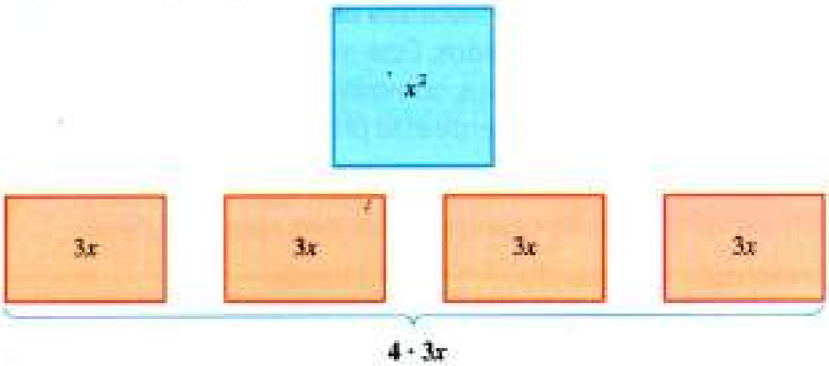
$$x + 2 = \pm 5$$

- Para $x + 2 = 5$, temos $x_1 = 3$.
- Para $x + 2 = -5$, temos $x_2 = -7$.

Veja outros exemplos.

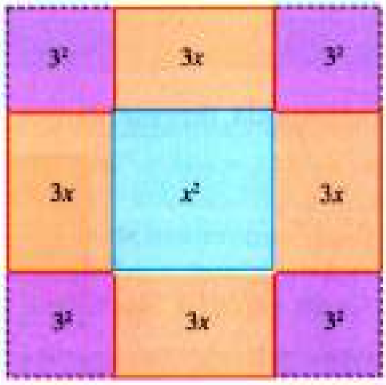
Exemplo 1

Para resolver a equação $x^2 + 12x - 13 = 0$, primeiro fazemos $x^2 + 12x = 13$. Em seguida, fazemos as representações geométricas:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUURA

Ao montar quadrado com as figuras obtidas, percebemos que faltam quatro quadrados de áreas 3^2 para obter o quadrado procurado.



Dessa forma, devemos somar $4 \cdot 3^2$ aos dois membros da equação. Assim, temos:

$$x^2 + 12x + 4 \cdot 3^2 = 13 + 4 \cdot 3^2$$
$$x^2 + 12x + 4 \cdot 9 = 13 + 4 \cdot 9$$
$$x^2 + 12x + 36 = 13 + 36$$
$$(x + 6)^2 = 49$$
$$x + 6 = \pm\sqrt{49}$$
$$x + 6 = \pm 7$$

- Para $x + 6 = 7$, temos $x_1 = 1$.
- Para $x + 6 = -7$, temos $x_2 = -13$.

Exemplo 2

Vamos resolver a equação $6x^2 + 7x + 2 = 0$. Nesse caso, $a = 6$. Por isso, dividimos todos os termos da equação por 6:

$$6x^2 + 7x + 2 = 0$$
$$\frac{6x^2}{6} + \frac{7}{6}x + \frac{2}{6} = \frac{0}{6}$$
$$x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$$
$$x^2 + \frac{7}{6}x = -\frac{1}{3}$$

Devemos encontrar um número que, somado aos dois membros, torne a expressão do primeiro membro um trinômio quadrado perfeito.

Para determinar esse número, fazemos assim:

$$x^2 + \underbrace{\frac{7}{6}}_{\frac{7}{6} : 2 = \frac{7}{12}} x = -\frac{1}{3}$$

Elevamos $\frac{7}{12}$ ao quadrado para obter o trinômio quadrado perfeito. Assim, temos:

$$x^2 + \frac{7}{6}x + \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \left(\frac{7}{12}\right)^2 - \frac{1}{3}$$

$$\left(x + \frac{7}{12}\right)^2 = \frac{1}{144}$$

$$x + \frac{7}{12} = \pm\sqrt{\frac{1}{144}}$$

$$x + \frac{7}{12} = \pm\frac{1}{12}$$

Dessa forma, obtemos:

- $x + \frac{7}{12} = \frac{1}{12}$

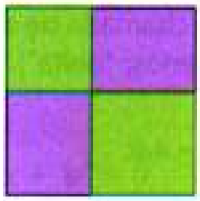
  $x_1 = -\frac{1}{2}$

- $x + \frac{7}{12} = -\frac{1}{12}$

  $x_2 = -\frac{2}{3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

39 Na figura ao lado, das partes quadradas coloridas com verde, a maior tem área x^2. A soma das áreas dos retângulos lilases é $8x$. Determine a área do quadrado menor. 16



40 Resolva as equações, em seu caderno, usando o método de completar quadrados.

a) $x^2 - 10x + 24 = 0$ $x = 4$ ou $x = 6$

b) $y^2 - 4y + 3 = 0$ $y = 1$ ou $y = 3$

c) $n^2 - 4n - 12 = 0$ $n = 6$ ou $n = -2$

d) $r^2 - 2r - 3 = 0$ $r = -1$ ou $r = 3$

41 Determine os valores reais de x que verificam as equações:

a) $4x^2 - 12x + 5 = 0$ $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{2}$

b) $9y^2 - 3y - 2 = 0$ $-\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$

c) $2n^2 + 7n + 6 = 0$ -2 e $-\frac{3}{2}$

d) $3x^2 + 8x - 3 = 0$ -3 e $\frac{1}{3}$

42 Considere três números naturais e consecutivos. O produto dos dois maiores é igual a 10 vezes o menor mais 10 unidades. Calcule, em seu caderno, a média aritmética desses três números. 9

43 Daqui a 6 anos, a idade de Daniela será igual ao quadrado da idade dela há 6 anos. Indique a idade atual de Daniela por x para resolver as questões que se seguem. construção de tabela

a) Construa uma tabela com as idades de Daniela: hoje, 6 anos atrás e daqui a 6 anos.

b) Que equação traduz a situação do problema? $x + 6 = (x - 6)^2$

c) Qual é a idade atual de Daniela? 10 anos

Pense mais um pouco...

Leia e resolva o problema em seu caderno.

Um prédio é abastecido por duas caixas-d'água em forma de cubo. A maior tem 1 m de aresta a mais que a menor.

Conversando com um morador do prédio sobre a capacidade das caixas-d'água, o síndico disse:

— A diferença entre os volumes das duas caixas é 91.000 litros.

Qual é a medida, em metro, da aresta de cada uma dessas caixas-d'água? 6 m e 5 m

5. A fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau

A resolução de uma equação do 2º grau pode ser obtida pela fórmula que deduziremos a seguir.

Considere a equação completa do 2º grau:

$ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx = -c$ **Isolamos o termo independente no 2º membro da equação**

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$ **Multiplicamos ambos os membros por $4a$ ($a \neq 0$)**

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$ **Adicionamos b^2 aos dois membros**

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ **Fatoramos o 1º membro**

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ (para $b^2 - 4ac \geqslant 0$)

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

Isolando x, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula resolutiva

Em algumas regiões do Brasil a fórmula para resolver a equação do 2º grau é conhecida como fórmula de Bhaskara, entretanto não foi Bhaskara quem a descobriu. Sabe-se que somente com o matemático francês François Viète (1540-1603) passou-se a usar fórmulas para obter as raízes de uma equação do 2º grau.

Na fórmula resolutiva, a expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de **discriminante da equação**, que geralmente é representado pela letra grega Δ (lemos: "delta"). Então:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Desse modo, se $\Delta \geqslant 0$, podemos escrever a fórmula resolutiva da seguinte maneira:

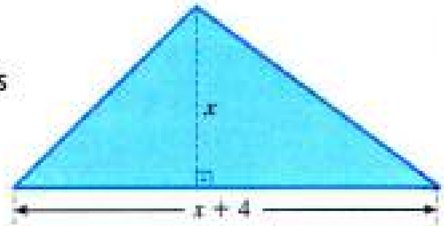
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

OBSERVAÇÃO

Quando $\Delta < 0$, a equação não admite raízes reais.

Veja um exemplo.

Considere o triângulo ao lado, cuja área é 10,5 cm². Vamos determinar a medida da altura desse triângulo.



$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\text{medida da base} \times \text{medida da altura}}{2}$$

$$10{,}5 = \frac{(x+4)x}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{x(x+4)}{2} = 10{,}5$$

$$2 \cdot \frac{(x+4)}{2} = 2 \cdot 10{,}5$$

$x(x + 4) = 2 \cdot 10{,}5$

$x^2 + 4x = 21$

$x^2 + 4x - 21 = 0$

Nessa equação, temos $a = 1$, $b = 4$ e $c = -21$.

Resolvendo a equação:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 84 = 100$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm 10}{2} \begin{cases} \dfrac{-4+10}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \text{ou} \\ \dfrac{-4-10}{2} = \dfrac{-14}{2} = -7 \end{cases}$$

As raízes da equação são $x_1 = 3$ e $x_2 = -7$.

Como x representa um comprimento, não podemos ter como solução -7. Logo, $x = 3$.

OBSERVAÇÃO

Substituindo na equação $x^2 + 4x - 21 = 0$ cada um dos valores encontrados, verificamos que obtemos igualdades numéricas verdadeiras. Por exemplo, para $x = -7$, temos:

$(-7)^2 + 4 \cdot (-7) - 21 = 0$

$49 - 28 - 21 = 0$

$49 - 49 = 0$ (verdadeira)

Acompanhe outros exemplos.

a) Resolver a equação $x^2 + 8x + 16 = 0$.

Temos: $a = 1$, $b = 8$ e $c = 16$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (8)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (16)$

$\Delta = 64 - 64 = 0$

Como $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais e iguais dadas por $x = \dfrac{-b}{2a}$.

Então: $x_1 = x_2 = \dfrac{-(+8)}{2} = -4$

b) Resolver a equação $3x^2 - 2x + 1 = 0$.

Temos: $a = 3$, $b = -2$ e $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (1)$

$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$

Como os números negativos não possuem raiz quadrada real, dizemos que a equação não admite raízes reais.

c) Resolver a equação $4x^2 - 12x + 7 = 0$.

Temos: $a = 4, b = -12$ e $c = 7$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (7) = 144 - 112 = 32$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-12) \pm 4\sqrt{2}}{2 \cdot (4)} = \frac{12 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}(3 \pm \sqrt{2})}{\underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$$

As raízes são: $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{2}}{2}$ e $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{2}}{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

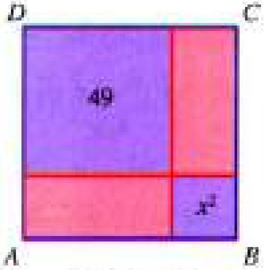
44 Encontre as raízes reais das equações em seu caderno.

a) $3x^2 - 7x + 4 = 0$ $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{4}{3}$
b) $2m^2 - m - 6 = 0$ $m_1 = -\frac{3}{2}$ e $m_2 = 2$
c) $-x^2 + 3x + 10 = 0$ $x_1 = -2$ e $x_2 = 5$
d) $y^2 + 8y - 4 = 0$ $y_1 = -4 + 2\sqrt{5}$ e $y_2 = -4 - 2\sqrt{5}$
e) $9y^2 - 12y + 4 = 0$ $y_1 = y_2 = \frac{2}{3}$
f) $5x^2 + 3x + 5 = 0$ Não tem raízes reais.

45 Escreva as seguintes equações na forma reduzida. Depois resolva-as no caderno.

a) $x(x + 3) = 5x + 15$ -3 e 5
b) $\dfrac{3y + 1}{2} = \dfrac{y^2 - 1}{3}$ $-\frac{1}{2}$ e 5
c) $(x + 4)^2 = 9x + 22$ -2 e 3
d) $(x - 1)^2 + 3x = x + 26$ -5 e 5
e) $(x + 4) \cdot (x - 1) = 5x + 20$ $x_1 = -4$ e $x_2 = 6$

46 Na figura a seguir, *ABCD* é um quadrado. As partes lilases também são quadrados.

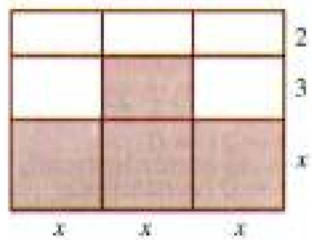


a) Escreva, no caderno, a expressão que representa a área da figura. $x^2 + 14x + 49$
b) Sabendo que a área do quadrado *ABCD* é 100 cm², determine a medida do lado do menor quadrado dessa figura. 3

47 A diferença entre a terça parte do quadrado de um número e o próprio número é 60. Qual é o triplo desse número? 45 ou −36

48 Uma folha quadrada de cartolina tem x cm de lado. Recorta-se dessa folha um retângulo que tem x cm de comprimento e 15 cm de largura. A parte que restou da folha é um retângulo de área 1.750 cm². Qual é a área da folha de cartolina? 2.500 cm²

49 A área da parte bege da figura abaixo é 60.



Calcule no caderno:
a) o valor de x: $x = 4$
b) a área da parte restante. 48

50 A base de um retângulo tem 5 m mais que a altura dele. A área do retângulo é 300 m². Calcule o perímetro desse retângulo. 70 m

51 Sabemos que o número de diagonais de um polígono convexo é determinado pela fórmula $d = \dfrac{n \cdot (n - 3)}{2}$, na qual d é o número de diagonais e n o número de lados do polígono. Sendo assim, determine o polígono que tem 35 diagonais. decágono

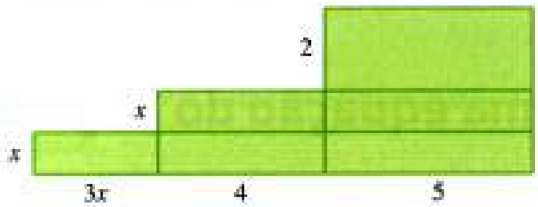
52 Sendo x um número desconhecido, escreva em seu caderno:

a) a equação do 2º grau que expressa "a metade da soma de um número com o seu quadrado é igual a 210"; $\frac{x + x^2}{2} = 210$

b) a equação do 2º grau que expressa "o quadrado desse número aumentado de seus $\frac{3}{5}$ é igual a 28"; $x^2 + \frac{3}{5}x = 28$

c) as soluções das equações dos itens **a** e **b**. a) -21 ou 20 b) 5 ou $-5,6$

53 Considere a figura abaixo para responder às questões em seu caderno.



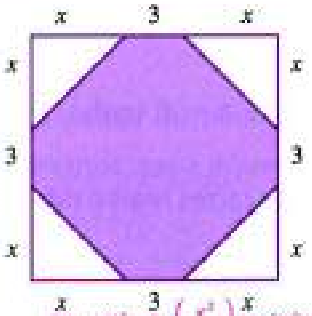
a) Qual é a expressão que representa a área dessa figura? $3x^2 + 18x + 10$

b) Se a área for 31, qual será a equação correspondente? $3x^2 + 18x - 21 = 0$

c) Quais são as raízes da equação encontrada? -7 e 1

d) Qual dessas raízes será solução se a área for 31? 1

54 Considere a figura a seguir e faça o que se pede em seu caderno.



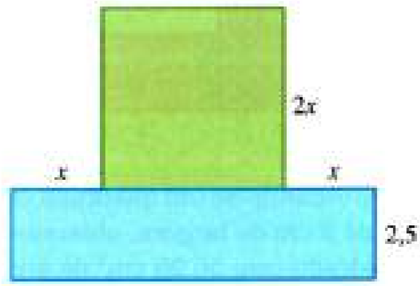
$(2x + 3)^2 - 4 \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)$ ou $2x^2 + 12x + 9$

a) Determine a expressão que representa a área pintada de lilás.

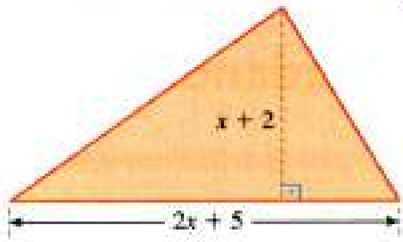
b) Indique o valor de x para que essa área seja 119. $x = 5$

55 A medida do lado de um quadrado é expressa por $(5x - 3)$ cm. A área desse quadrado mede 16 cm². Qual é a área de um retângulo cujas dimensões são expressas por $(5x - 3)$ cm e $(5x + 4)$ cm? 44 cm²

56 Para que valor de x a área do quadrado verde será igual à área do retângulo azul na figura a seguir? Responda em seu caderno. $x = 2,5$



57 Para que valor de x o triângulo a seguir tem 95 cm² de área? Responda em seu caderno. 7,5 cm

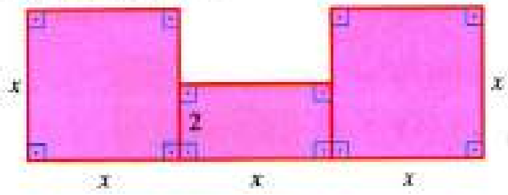


58 Sueli gosta de inventar problemas de Matemática para suas amigas. Outro dia, ela escreveu um problema numa folha de papel e entregou para Marlene resolver. $2x^2 - 4x + 3 = 0$

Resolva, no caderno, o problema que Sueli inventou. $\Delta < 0$, não existe número real que satisfaça a equação.

59 (Vunesp) Corta-se um pedaço de arame de 12 dm em duas partes e constrói-se, com cada uma delas, um quadrado. Se a soma das áreas é 5 dm², determine a que distância de uma das extremidades do arame foi feito o corte. 4 dm ou 8 dm

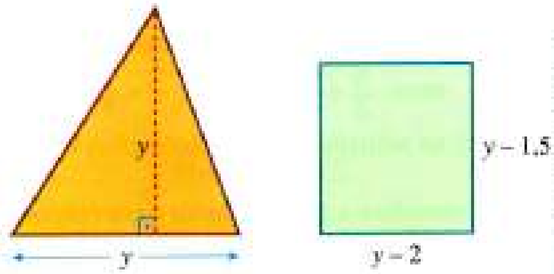
60 Qual deve ser o valor de x para que a figura tenha área 40? $x = 4$



61 Contornando-se um quadrado com uma faixa de 2 cm de largura, obteremos um novo quadrado com 56,25 cm² de área. Qual é a medida do lado do primeiro quadrado? Responda em seu caderno. 3,5 cm

62 Subtraindo-se 6,75 do quadrado de um número, obtém-se o triplo do próprio número. Que número é esse? −1,5 ou 4,5

63 Qual deve ser o valor de y para que as figuras tenham áreas iguais? $y = 6$



6. Estudando as raízes de uma equação do 2º grau

Do estudo que fizemos sobre as equações do 2º grau, podemos dizer que:

- Uma equação do 2º grau admite duas raízes reais e diferentes se, e somente se, $\Delta > 0$.
  Nesse caso, as raízes são dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Uma equação do 2º grau admite duas raízes reais e iguais se, e somente se, $\Delta = 0$.
  Nesse caso, as raízes são dadas por:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

- Uma equação do 2º grau não admite raízes reais se, e somente se, $\Delta < 0$.

Acompanhe a resolução dos exemplos seguintes.

a) Determinar o valor de k para que a equação $x^2 - 8x + k = 0$ tenha duas raízes reais e diferentes.

Como queremos que a equação do 2º grau admita duas raízes reais e diferentes, devemos impor a condição $\Delta > 0$.

Temos: $a = 1$, $b = -8$ e $c = k$

$b^2 - 4ac > 0$

$(-8)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (k) > 0$

$64 - 4k > 0$

$-4k > -64$

$4k < 64$

$\frac{4k}{4} < \frac{64}{4}$

$k < 16$

OBSERVAÇÃO

Podemos substituir valores possíveis de k na equação para verificar se o valor de Δ é positivo. Veja dois exemplos:

Para $k = 0$, temos:

$x^2 - 8x = 0$

$\Delta = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 0$

$\Delta = 64 > 0$

Para $k = 10$, temos:

$x^2 - 8x + 10 = 0$

$\Delta = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 10$

$\Delta = 24 > 0$

b) Determinar o valor de n para que a equação $x^2 - 5x + n = 0$ tenha duas raízes reais e iguais.

Como queremos que a equação do 2º grau admita duas raízes reais e iguais, devemos impor a condição $\Delta = 0$.

Temos: $a = 1$, $b = -5$ e $c = n$

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(-5)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (n) = 0$$
$$25 - 4n = 0$$
$$-4n = -25$$
$$4n = 25$$
$$\frac{4n}{4} = \frac{25}{4}$$
$$n = \frac{25}{4}$$

c) Determinar o valor de m na equação $3x^2 - 5x + 2m = 0$ para que não existam raízes reais.

Como queremos que a equação do 2º grau não admita raízes reais, devemos impor a condição $\Delta < 0$.

Temos: $a = 3$, $b = -5$ e $c = 2m$

$$b^2 - 4ac < 0$$
$$(-5)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (2m) < 0$$
$$25 - 24m < 0$$
$$-24m < -25$$
$$24m > 25$$
$$\frac{24m}{24} > \frac{25}{24}$$
$$m > \frac{25}{24}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

64 Dada a equação $2x^2 + 3x + p = 0$, determine em seu caderno:

a) o valor de p para que as raízes sejam reais e iguais; $\frac{9}{8}$

b) as raízes para o valor de p encontrado no item anterior; $x_1 = x_2 = -\frac{3}{4}$

c) o valor de p para que uma das raízes seja igual a zero; $p = 0$

d) o valor de p para que uma das raízes seja 2; $p = -14$

e) o valor de p para que a equação não admita raízes reais. $p > \frac{9}{8}$

65 Para que valores de k a equação $2x^2 + 4x + 5k = 0$ tem raízes reais e diferentes? $k < \frac{2}{5}$

66 Determine, no caderno, o valor de k na equação $x^2 - kx + 9 = 0$, para que as raízes sejam reais e iguais. $k = 6$ ou $k = -6$

67 Determine, no caderno, o valor de p na equação $x^2 - (p + 5)x + 36 = 0$, para que as raízes sejam reais e iguais. $p = 7$ ou $p = -17$

68 Considere a equação $9x^2 + 12x + 2m = 0$. Para que valores de m essa equação:

a) não admite raízes reais? $m > 2$

b) tem duas raízes reais e iguais? $m = 2$

c) tem duas raízes reais e diferentes? $m < 2$

d) tem o número 0,2 como raiz? $-1,38$

Pense mais um pouco...

Considere o exercício 68 da série acima.

O que podemos concluir sobre as raízes da equação:

- quando $m = 2,5$?
- e quando $m = 1,8$?

Responda em seu caderno.

Como $m = 2,5 > 2$, temos que nesse caso a equação não admite raízes reais. Como $m = 1,8 < 2$, temos que nesse caso a equação tem duas raízes reais e diferentes.

JOSÉ LUÍS JUHAS

7. Relações de Girard

No início do século XVII, houve grande interesse em toda a Europa Ocidental pelos estudos matemáticos. Muitas pesquisas foram feitas no sentido de dar soluções às diversas equações e de estabelecer relações entre os seus coeficientes e suas raízes. Acontece, porém, que esses estudos eram limitados pelo fato de os matemáticos da época não aceitarem a existência de raízes negativas.

No ano de 1629, o francês Albert Girard (1595-1632) escreveu o livro *Invention nouvelle en algèbre*. Nesse livro, ele demonstra as relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação, admitindo a existência das raízes negativas.

Vamos estudar essas relações para uma equação do 2º grau.

Considere a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$. Sejam x_1 e x_2 suas raízes. Vamos estabelecer as relações de Girard entre essas raízes e os coeficientes a, b e c da equação.

Sabemos que:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (\text{com } \Delta \geq 0)$$

1ª relação: Soma das raízes

Indicando por S a soma das raízes de uma equação do 2º grau, verifiquemos que $S = \dfrac{-b}{a}$.
De fato:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Então:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{ou} \quad S = \frac{-b}{a}$$

2ª relação: Produto das raízes

Indicando por P o produto das raízes de uma equação do 2º grau, verifiquemos que $P = \dfrac{c}{a}$.

De fato:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Então:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{ou} \quad P = \frac{c}{a}$$

Veja alguns exemplos de aplicação das relações de Girard.

a) Determinar o valor de k na equação $kx^2 - 22x + 20 = 0$, para que a soma das raízes seja $\dfrac{11}{3}$.

Temos: $a = k$, $b = -22$ e $c = 20$

$$\underbrace{x_1 + x_2} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{-b}{a} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{-(-22)}{k} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{22}{k} = \frac{11}{3}$$

$$11k = 66$$

$$\frac{11k}{11} = \frac{66}{11}\text{, ou seja, } k = 6$$

JOSÉ LUIS JUHAS

b) Determinar o valor de p na equação $px^2 - 5x + (p - 5) = 0$, para que o produto das raízes seja $\frac{1}{6}$.

Temos: $a = p$, $b = -5$ e $c = p - 5$

$$\underbrace{x_1 \cdot x_2}_{} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{p-5}{p} = \frac{1}{6}$$

$$6 \cdot (p - 5) = p$$

$$6p - 30 = p$$

$$5p = 30, \text{ ou seja, } p = 6$$

c) Calcular o valor de k na equação $x^2 - 12x + k = 0$, para que uma das raízes seja o dobro da outra.

Indicando as raízes dessa equação por m e n, temos:

$$\begin{cases} m + n = \frac{-b}{a} = \frac{-(-12)}{1} = 12 \\ m \cdot n = \frac{c}{a} = \frac{k}{1} = k \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} m + n = 12 \\ m \cdot n = k \end{cases}$$

De acordo com a condição do problema, $m = 2n$.

Vamos inicialmente resolver o sistema $\begin{cases} m + n = 12 \\ m = 2n \end{cases}$

Substituindo m por $2n$ na equação $m + n = 12$, temos:

$$2n + n = 12, \text{ ou seja, } n = 4 \text{ e portanto: } m = 8$$

Como $k = m \cdot n$, vem: $k = 8 \cdot 4 = 32$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

69 Considere x_1 e x_2 as raízes da equação $2x^2 - 6x + 5 = 0$. Sem resolver a equação, determine em seu caderno:

a) $x_1 + x_2$ 3 **b)** $x_1 \cdot x_2$ $\frac{5}{2}$

70 Em cada caso, determine a soma S e o produto P das raízes das equações e, com eles, calcule as raízes.

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ $S = 8$; $P = 15$; $x_1 = 3$, $x_2 = 5$

b) $x^2 + 2x - 3 = 0$ $S = -2$; $P = -3$; $x_1 = -3$, $x_2 = 1$

c) $5x^2 + 21x + 4 = 0$

d) $x^2 + 7x + 12 = 0$ $S = -7$; $P = 12$; $x_1 = -3$, $x_2 = -4$

e) $3x^2 - 6x = 0$ $S = 2$; $P = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

c) $S = -\frac{21}{5}$; $P = \frac{4}{5}$; $x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{1}{5}$

71 Se m e n são raízes da equação $x^2 - 9x + 20 = 0$, determine, em seu caderno, o valor da expressão $mn(m + n)$. 180

72 Determine, em seu caderno, o valor de m na equação $4x^2 - (m - 2) \cdot x + 3 = 0$ para que a soma das raízes seja $\frac{3}{4}$. $m = 5$

73 Calcule, em seu caderno, o valor de m na equação $(m + 10) \cdot x^2 + 21x + 5 = 0$ para que a soma das raízes seja $-\frac{7}{6}$. $m = 8$

74 Determine, em seu caderno, o valor de p na equação $6x^2 - 11x + (p - 1) = 0$ para que o produto das raízes seja $\dfrac{2}{3}$. $p = 5$

75 Calcule, em seu caderno, o valor de p na equação $x^2 - 8x + 2p = 0$ para que uma das raízes seja o triplo da outra. $p = 6$

76 A professora Neusa fez vários cartões com exercícios para sortear na aula de Matemática. Felipe foi sorteado com este cartão:

Qual é o resultado da operação $a \cdot b - (a + b)$ se a e b são as raízes da equação $2x^2 - 2x - 24 = 0$?

JOSÉ LUIS JUHAS

Qual deve ser a resposta de Felipe para que acerte a questão proposta no cartão? -13

Composição de uma equação do 2º grau

Conhecidas as relações de Girard, é possível compor uma equação do 2º grau quando são dadas suas raízes. É o que veremos a seguir.

Considere a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Dividindo todos os termos por a, sendo $a \neq 0$, temos:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \quad \text{ou} \quad x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

De acordo com as relações de Girard, temos:

$$\frac{-b}{a} = S \quad \text{ou} \quad \frac{b}{a} = -S \quad \text{ou} \quad \frac{c}{a} = P$$

Substituindo $\dfrac{b}{a}$ por $-S$ e $\dfrac{c}{a}$ por P, em $x^2 + \dfrac{bx}{a} + \dfrac{c}{a} = 0$, vem:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Vejamos os seguintes exemplos de composição de equações do 2º grau partindo-se de suas raízes.

a) Compor uma equação do 2º grau cujas raízes sejam 3 e -8.

Vamos calcular a soma S das raízes:

$$S = x_1 + x_2$$
$$S = 3 + (-8)$$
$$S = -5$$

Vamos calcular o produto P das raízes:

$$P = x_1 \cdot x_2$$
$$P = 3 \cdot (-8)$$
$$P = -24$$

Substituindo, em $x^2 - Sx + P = 0$, S por -5 e P por -24, temos:

$$x^2 - Sx + P = 0$$
$$x^2 - (-5) \cdot x + (-24) = 0, \text{ ou seja, } x^2 + 5x - 24 = 0$$

Logo, $x^2 + 5x - 24 = 0$ é a equação procurada.

b) Compor uma equação do 2º grau cujas raízes sejam 2 e $\frac{3}{5}$.

$$S = x_1 + x_2$$

$$S = 2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$$

$$P = x_1 \cdot x_2$$

$$P = 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$x^2 - \frac{13}{5}x + \frac{6}{5} = 0$, ou seja, a equação procurada é $5x^2 - 13x + 6 = 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

77 Escreva, em seu caderno, uma equação do 2º grau em que a soma das raízes seja 35 e o produto, 300. $x^2 - 35x + 300 = 0$

78 Componha uma equação do 2º grau que tenha por raízes 12 e 10. $x^2 - 22x + 120 = 0$

79 Forme uma equação do 2º grau em que as raízes sejam:

a) $x_1 = -8$ e $x_2 = 5$ $x^2 + 3x - 40 = 0$

b) $x_1 = 2$ e $x_2 = \frac{4}{5}$ $5x^2 - 14x + 8 = 0$

c) $x_1 = -3$ e $x_2 = -\frac{1}{2}$ $2x^2 + 7x + 3 = 0$

d) $x_1 = \frac{1}{3}$ e $x_2 = -\frac{2}{5}$ $15x^2 + x - 2 = 0$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

80 Determine, em seu caderno, k na equação $kx^2 - 16x + 5 = 0$ para que:

a) uma das raízes seja 3; $k = \frac{43}{9}$

b) uma das raízes seja $\frac{1}{2}$; $k = 12$

c) as raízes sejam reais e distintas; $k < \frac{64}{5}$

d) a soma das raízes seja $\frac{4}{3}$. $k = 12$

81 Encontre o valor de p em seu caderno.

(UCS-RS) Se uma das raízes da equação $2x^2 - 3px + 40 = 0$ é 8, então o valor de p é: alternativa c

a) 5
b) $\frac{13}{3}$
c) 7
d) -5
e) -7

82 Resolva em seu caderno.

(Unifor-CE) Uma das soluções da equação $\frac{2x^2 + x}{11} = 2x + 1$ é um número inteiro múltiplo de: alternativa e

a) 2 b) 3 c) 5 d) 7 e) 11

83 Encontre o número pedido em seu caderno.

(Fuvest-SP) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $10x^2 + 33x - 9 = 0$.

O número inteiro mais próximo do número $5 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot (x_1 + x_2)$ é: alternativa b

a) -33 b) -10 c) -7 d) 10 e) 33

84 Encontre os valores de B em seu caderno.

(Ulbra-RS) O(s) valor(es) de B na equação $x^2 - Bx + 4 = 0$ para que o discriminante seja igual a 65 é (são): alternativa d

a) 0
b) 9
c) -9
d) -9 ou 9
e) 16

85 Resolva em seu caderno.

(FGV-SP) Se a soma das raízes da equação $kx^2 + 3x - 4 = 0$ é 10, podemos afirmar que o produto das raízes é: alternativa a

a) $\frac{40}{3}$
b) $-\frac{40}{3}$
c) $\frac{80}{3}$
d) $-\frac{80}{3}$
e) $-\frac{3}{10}$

86 Encontre o valor de k em seu caderno.

(Ufes) O valor de k para que a soma das raízes da equação $(k-3)x^2 - 4kx + 1 = 0$ seja igual ao seu produto é: alternativa c

a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

87 (Fuvest-SP) Para a fabricação de bicicletas, uma empresa comprou unidades do produto A, pagando R\$ 96,00, e unidades do produto B, pagando R\$ 84,00. Sabendo que o total de unidades compradas foi de 26 e que o preço unitário do produto A excede em R\$ 2,00 o preço unitário do produto B, determine o número de unidades de A que foi comprado. 12 unidades

88 Resolva em seu caderno.

(PUC-MG) O quociente da divisão de 72 por um número negativo é o dobro desse número. A metade desse número é: alternativa a

a) −3 b) −4 c) −5 d) −6 e) −7

89 Encontre a medida em seu caderno.

(Vunesp) Se aumentarmos em 3 cm o lado de um quadrado, sua área aumentará 27 cm². A partir desses dados, podemos dizer que o lado do quadrado mede, em cm: alternativa a

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

90 Faça os cálculos pedidos em seu caderno.

(UFF-RJ) Cortando-se pedaços quadrados iguais nos cantos de uma cartolina retangular de 80 cm de comprimento por 60 cm de largura, obtém-se uma figura em forma de cruz. Se a área da cruz for a terça parte da área retangular original, o tamanho do lado de cada quadrado é igual a: alternativa d

a) $5\sqrt{2}$ cm d) $20\sqrt{2}$ cm

b) $10\sqrt{2}$ cm e) $25\sqrt{2}$ cm

c) $15\sqrt{2}$ cm

91 Ao compor uma equação do 2º grau, Fernanda, por engano, escreveu-a na forma:

$$x^2 - Px + S = 0$$

Resolveu a equação corretamente e encontrou as raízes 1 e 5. Se Fernanda tivesse usado corretamente as relações de Girard, para compor sua equação, quais seriam as raízes? 2 e 3

92 (Unifor-CE) Um estudante resolve uma equação do tipo $x^2 + bx + c = 0$ e, enganando-se no valor de c, obtém as raízes 8 e 2. Um colega seu, resolvendo a mesma equação, engana-se no valor de b e obtém as raízes −9 e −1. Resolvendo-se a equação correta, quanto se obtém somando o triplo da menor raiz com a outra? 12

8. Equações fracionárias

Uma lancha percorre 420 km à velocidade média de x km/h ($x > 0$). Se ela aumentasse a velocidade em 10 km/h, o tempo para percorrer a mesma distância diminuiria em 1 hora. Vamos determinar a velocidade média dessa lancha.

ROBERT JOHNSON/MASTERFILE/OTHER IMAGES

JOSÉ LUIS JUHAS

O tempo para percorrer 420 km é:

- $\frac{420}{x}$ se a velocidade média for x km/h;
- $\frac{420}{x+10}$ se a velocidade média for $(x + 10)$ km/h.

A diferença entre esses tempos é de 1 hora. A equação que traduz essa situação é:

$$\frac{420}{x}-\frac{420}{x+10}=1$$

sendo a incógnita x a velocidade média dessa lancha em km/h.

Trata-se de um exemplo de **equação fracionária**. Ela é assim chamada porque possui termos que são frações algébricas, isto é, frações em que pelo menos uma incógnita aparece no denominador.

Veja como resolvemos essa equação fracionária:

$$\frac{420}{x}-\frac{420}{x+10}=1$$

$$\frac{420}{\cancel{x}}\cdot \cancel{x}(x+10)-\frac{420}{\cancel{(x+10)}}\cdot x\cancel{(x+10)}=1\cdot x(x+10)$$ **Multiplicamos todos os termos por $x(x + 10)$**

$420(x + 10) - 420x = x(x + 10)$ **Eliminamos os parênteses**

$420x + 4.200 - 420x = x^2 + 10x$ **Reduzimos os termos semelhantes**

$x^2 + 10x - 4.200 = 0$

Resolvemos então a equação do 2º grau obtida, encontrando $x_1 = 60$ e $x_2 = -70$.

Como nessa situação x deve ser maior que 0, o único valor possível para x é 60.

Logo, a velocidade média dessa lancha é 60 km/h.

Veja outro exemplo de equação fracionária.

Vamos resolver a equação:

$$2+\frac{3-7x}{x^2-1}=\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1}{x-1},\ \text{sendo } x \neq 1 \text{ e } x \neq -1$$

Escrevendo os denominadores na forma fatorada, temos:

$$2+\frac{3-7x}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}$$

$$2(x+1)(x-1)+\frac{(3-7x)\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}=$$ **Multiplicando todos os termos por $(x + 1)(x - 1)$**

$$=\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}}-\frac{(x+1)(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}$$

$2(x^2 - 1) + (3 - 7x) = (x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 2x + 1)$

$2x^2 - 2 + 3 - 7x = \cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} - \cancel{x^2} - 2x - \cancel{1}$ **Eliminando os parênteses**

$2x^2 + 1 - 7x + 2x + 2x = 0$

$2x^2 - 3x + 1 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, temos: $a = 2$, $b = -3$ e $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm 1}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$\frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

ou

$$\frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Encontramos, assim, duas raízes para a equação dada: $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{1}{2}$. Como x deve ser diferente de 1, a solução dessa equação é $\frac{1}{2}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

93 Resolva as equações em seu caderno.

a) $x + \dfrac{1}{x-5} = 7$, sendo $x \neq 5$ $x_1 = x_2 = 6$

b) $\dfrac{y+3}{y-1} = \dfrac{y+1}{3}$, sendo $x \neq 1$ $y_1 = -2$ e $y_2 = 5$

c) $\dfrac{3x+2}{x-3} - \dfrac{2x-1}{x+3} = \dfrac{26x-12}{x^2-9}$, sendo $x \neq -3$ e $x \neq 3$ $x = 5$

d) $\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{x-2}{x} = 1$, sendo $x \neq 0$ e $x \neq 1$ $x_1 = -1 - \sqrt{3}$ e $x_2 = -1 + \sqrt{3}$

94 A soma de dois números inversos é igual a $\frac{10}{3}$. Determine esses números em seu caderno. 3 e $\frac{1}{3}$

95 Com 1.650 cm² de cartolina, João recortou certo número de cartões, todos do mesmo tamanho.

Se cada cartão tivesse 5 cm² a mais, ele teria recortado 3 cartões a menos. Quantos cartões foram recortados por João? 33 cartões

96 Trabalhando juntos, pai e filho realizam um serviço em 1,2 hora. Trabalhando separadamente, o pai realiza o mesmo serviço em x horas, enquanto seu filho o faz em $(x + 1)$ horas. Calcule, em seu caderno, em quanto tempo o filho realiza esse serviço quando trabalha sozinho. 3 h

9. Equação biquadrada

Suponha que um barco esteja navegando entre dois portos de um rio de correnteza. Sua velocidade, descendo o rio, é de x^2 km/h, mas, ao subir, ela se torna inversa da velocidade da descida. O barco percorre o trajeto de ida e volta entre os dois portos em 4 horas e 15 minutos. Vamos determinar sua velocidade na descida.

A equação que traduz essa situação é:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{17}{4} \quad \left(4\text{ h }15\text{ min} = 4\frac{1}{4}\text{ h} = \frac{17}{4}\text{ h}\right)$$

Multiplicando os dois membros da equação por $4x^2$, temos:

$$4x^4 + 4 = 17x^2 \text{ ou } 4x^4 - 17x^2 + 4 = 0 \text{ ou } 4(x^2)^2 - 17x^2 + 4 = 0$$

Substituindo x^2 por y (a qual chamaremos de **incógnita auxiliar**), obtemos a equação do 2º grau:

$$4y^2 - 17y + 4 = 0$$

Resolvendo essa equação, encontramos: $y = 4$ ou $y = \frac{1}{4}$

Como $y = x^2$, então $x^2 = 4$ e, portanto, nas condições do problema, a velocidade do barco na descida é 4 km/h.

A equação $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ é um exemplo de **equação biquadrada**.

Observe que ela é do quarto grau, e que os expoentes das incógnitas são números pares.

Veja alguns exemplos de equações biquadradas:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $9x^4 + 37x^2 + 4 = 0$

c) $x^4 - 16x^2 = 0$

d) $-3x^4 + 48 = 0$

De modo geral, uma equação na incógnita x é chamada de **biquadrada** quando pode ser escrita na forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

sendo a, b e c números reais quaisquer, com $a \neq 0$.

Podemos escrever uma equação biquadrada na forma $a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$.

Para resolvê-la, usamos uma incógnita auxiliar, como foi visto na situação inicial, substituindo x^2 por y. Fazendo isso, obtemos uma equação do 2º grau.

Veja dois exemplos de resolução de equações biquadradas:

a) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$

$4(x^2)^2 - 13(x^2) + 3 = 0$

Fazendo $x^2 = y$, temos:

$4y^2 - 13y + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 169 - 48 = 121$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) \pm 11}{2 \cdot 4} = \frac{13 \pm 11}{8} \begin{cases} \frac{13+11}{8} = \frac{24}{8} = 3 \\ \text{ou} \\ \frac{13-11}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Como $x^2 = y$, temos:

- $x^2 = 3$, ou seja, $x = \pm\sqrt{3}$
- $x^2 = \frac{1}{4}$, então: $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$, ou seja, $x = \pm\frac{1}{2}$

Logo, as raízes dessa equação são $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$

b) $x^4 + 4x^2 - 45 = 0$

$(x^2)^2 + 4(x^2) - 45 = 0$

Fazendo $x^2 = y$, obtemos:

$y^2 + 4y - 45 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4(1)(-45) = 16 + 180 = 196$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$

$$y = \frac{-4 \pm 14}{2} \begin{cases} \dfrac{-4+14}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ \text{ou} \\ \dfrac{-4-14}{2} = \dfrac{-18}{2} = -9 \end{cases}$$

Como $x^2 = y$, temos: $x^2 = 5$, ou seja, $x = \pm\sqrt{5}$

De $x^2 = -9$ não se obtêm valores reais para x.

Logo, as raízes dessa equação são $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$.

JOSÉ LUIS JUHAS

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

97 Determine, em seu caderno, as quatro raízes reais da equação $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$. $-4, -1, 1$ e 4

98 Calcule, no caderno, x de modo que $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$. $-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$

99 Resolva, em seu caderno, as equações biquadradas:

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ -2 e 2

b) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$ $-\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$

c) $x^4 - 36x^2 = 0$ $0, -6$ e 6

d) $3x^4 - 75 = 0$ $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$

100 A equação $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ tem apenas duas raízes reais. Quais são elas? -2 e 2

101 Para que valores de x temos que $2x^4 = 32$? -2 e 2

102 Determine, em seu caderno, os valores de x que tornam iguais as expressões $\dfrac{x^4 - x^2}{6}$ e $3x^2 + 25$. -5 e 5

103 A soma dos quadrados de dois números positivos e inversos é $\dfrac{97}{36}$. Quais são esses números? $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$

10. Equação irracional

Observe as equações:

- $\sqrt{x-2} = 5$
- $\sqrt{2x-1} = x-2$
- $\sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{x}$
- $x + \sqrt[3]{x-1} = 11$

Essas equações são exemplos de **equações irracionais**, pois apresentam incógnita no radicando.

Para resolver uma equação irracional, devemos elevar os dois membros a uma potência conveniente, de modo que resulte uma equação racional. Ao fazer isso, porém, podem aparecer raízes da equação racional que não satisfaçam a equação irracional.

Devemos então verificar, entre as raízes encontradas, aquelas que são raízes verdadeiras da equação irracional.

Veja dois exemplos de resolução de equações irracionais.

a) $\sqrt{x-1} + 3 = x$

$\sqrt{x-1} = x - 3$ **Isolando o radical**

$\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = (x-3)^2$ **Elevando ambos os membros ao quadrado**

$x - 1 = x^2 - 6x + 9$

$-x^2 + x + 6x - 1 - 9 = 0$

$-x^2 + 7x - 10 = 0$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm 3}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} \begin{cases} \dfrac{7+3}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ \text{ou} \\ \dfrac{7-3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Os números 5 e 2 são raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$; precisamos verificar se eles também são raízes da equação irracional $\sqrt{x-1} + 3 = x$.

Verificação

Para $x = 5$, temos:

$\sqrt{x-1} + 3 = x$

$\sqrt{5-1} + 3 = 5$

$\sqrt{4} + 3 = 5$

$2 + 3 = 5$ (verdadeira)

Logo, 5 é raiz da equação irracional dada.

Para $x = 2$, temos:

$\sqrt{x-1} + 3 = x$

$\sqrt{2-1} + 3 = 2$

$\sqrt{1} + 3 = 2$

$1 + 3 = 2$ (falsa)

Logo, 2 não é raiz da equação irracional dada.

Portanto, 5 é a única solução dessa equação.

b) $\sqrt{5 + \sqrt{3x-2}} = 3$

$\left(\sqrt{5 + \sqrt{3x-2}}\right)^2 = 3^2$

$5 + \sqrt{3x-2} = 9$

$\sqrt{3x-2} = 9 - 5$

$\sqrt{3x-2} = 4$

$\left(\sqrt{3x-2}\right)^2 = 4^2$

$3x - 2 = 16$

$3x = 18$

$\frac{3x}{3} = \frac{18}{3}$

$x = 6$

Verificação

Para $x = 6$, temos:

$\sqrt{5 + \sqrt{3(6) - 2}} = 3$

$\sqrt{5 + \sqrt{18 - 2}} = 3$

$\sqrt{5 + \sqrt{16}} = 3$

$\sqrt{5 + 4} = 3$

$\sqrt{9} = 3$

$3 = 3$ (verdadeira)

Logo, 6 é a solução dessa equação.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

104 Determine, em seu caderno, x real de modo que $\sqrt{3x + 1} = 5$. 8

105 Determine, em seu caderno, os valores reais de x para os quais se tem $\sqrt{x^2 - 12x + 36} = 7$. −1 e 13

106 Determine para que valores reais de x a expressão $\sqrt{x^2 + 3x + 2}$ é igual a $2\sqrt{3}$. −5 e 2

107 Qual valor real de x é solução da equação $2 + \sqrt{2x - 1} = x$? 5

108 Calcule, em seu caderno, x real sabendo que $\sqrt{13 + \sqrt{12 - x}} = 4$. 3

109 A equação $\sqrt{x + 7} = x - 5$ tem uma única solução real. Qual é ela? 9

110 Um número real x é tal que $\sqrt{x + \sqrt{2x - 3}} = 3$. Determine o valor de x. 6

111 Calcule, em seu caderno, x real nas equações:

a) $\sqrt{x^2 + x} = \sqrt{20}$ −5 e 4

b) $x + \sqrt{2x + 5} + 15$ 10

Pense mais um pouco...

Dora economizou um total de R$ 260,00 entre notas de R$ 10,00 e R$ 50,00. Somando o quádruplo do número de notas de R$ 10,00 com 12 e extraindo a raiz quadrada dessa soma, obtemos o número de notas de R$ 10,00. Quantas notas de R$ 50,00 Dora possui? 4 notas

11. Sistemas de equações do 2º grau

Considere a situação seguinte.

Hoje, a soma das idades de um pai e de seu filho é 38 anos. Sabendo que daqui a 2 anos a idade do pai será igual ao quadrado da idade do filho, calcule a idade de cada um hoje.

Para calcular as idades, vamos chamar de x a idade do pai e de y a idade do filho. Com os dados fornecidos, podemos montar o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 38 \\ x + 2 = (y + 2)^2 \end{cases}$$

Isolando x na equação $x + y = 38$, obtemos:

$$x = 38 - y$$

Substituindo x por $38 - y$ na equação $x + 2 = (y + 2)^2$, temos:

$$x + 2 = (y + 2)^2$$
$$38 - y + 2 = y^2 + 4y + 4$$
$$-y^2 - y - 4y + 38 + 2 - 4 = 0$$
$$-y^2 - 5y + 36 = 0$$
$$y^2 + 5y - 36 = 0$$

JOSÉ LUIS JUHAS

Resolvendo essa equação na incógnita y, vem:

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 25 + 144 = 169$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm 13}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 13}{2} \begin{cases} \dfrac{-5+13}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ \text{ou} \\ \dfrac{-5-13}{2} = \dfrac{-18}{2} = -9 \end{cases}$$

$y = -9$ não serve, pois não podemos ter uma idade negativa.

Então $y = 4$, ou seja, o filho tem 4 anos.

Substituindo y por 4 na equação $x = 38 - y$, encontramos a idade do pai:

$$x = 38 - y = 38 - 4 = 34$$

Logo, hoje o filho tem 4 anos e o pai, 34 anos.

Vejamos a resolução de um outro sistema de equações do 2º grau: $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 14 \\ 5x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 14 \\ 5x^2 - y^2 = 1 \quad \times 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 14 \\ 15x^2 - 3y^2 = 3 \end{cases} \downarrow \textbf{Somando}$$

$$17x^2 = 17$$

$$\frac{17x^2}{17} = \frac{17}{17}$$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x = \pm 1$

Vamos substituir x por 1 e x por -1 na equação $2x^2 + 3y^2 = 14$.

Para $x = 1$, temos:

$2x^2 + 3y^2 = 14$

$2 \cdot 1^2 + 3y^2 = 14$

$3y^2 = 14 - 2$

$3y^2 = 12$

$\frac{3y^2}{3} = \frac{12}{3}$

$y^2 = 4$

$y = \pm\sqrt{4}$

$y = \pm 2$

Para $x = -1$, temos:

$2x^2 + 3y^2 = 14$

$2 \cdot (-1)^2 + 3y^2 = 14$

$2 \cdot 1 + 3y^2 = 14$

$3y^2 = 14 - 2$

$3y^2 = 12$

$y^2 = \frac{12}{3}$

$y^2 = 4$

$y = \pm\sqrt{4}$

$y = \pm 2$

Portanto, são soluções do sistema os pares ordenados:

$$(1, 2), (1, -2), (-1, 2) \text{ e } (-1, -2)$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

112. c) (3, 2), (3, −2), (−3, 2) e (−3, −2)

112 Resolva os sistemas de equações em seu caderno.

(12, 5) e (−5, −12) **a)** $\begin{cases} x - y = 7 \\ xy = 60 \end{cases}$

(2, 4) e (4, 2) **b)** $\begin{cases} a^2 + b^2 = 20 \\ a + b = 6 \end{cases}$

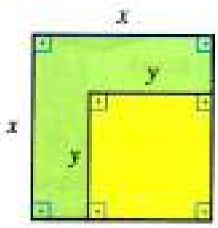
c) $\begin{cases} m^2 + n^2 = 13 \\ m^2 - n^2 = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x + y = 52 - 2xy \end{cases}$ (3, 7) e (7, 3)

113 Determine, em seu caderno, dois números positivos a e b de modo que $a + b = 2$ e $a^2 + b^2 = \frac{5}{2}$. $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{2}$ ou $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$

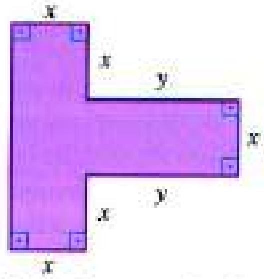
114 A diferença entre dois números é 3. A soma de seus quadrados é 17. Qual é o maior desses números? 4 ou −1

115 Na figura a seguir, a área verde tem 51 cm² e a diferença entre as medidas dos lados dos quadrados é 3 cm. Calcule a área pintada de amarelo. 49 cm²



NELSON MATSUDA

116 Calcule as medidas x e y da figura ao lado sabendo que a área dela é 5 e que o perímetro é 12. $x = 1$ $y = 2$



NELSON MATSUDA

117 A razão entre a medida da base e a da altura de um triângulo é $\frac{5}{3}$, e a área dele é 120. Calcule, em seu caderno, a medida da base e a da altura desse triângulo. base: 20 e altura: 12

118 As dimensões de um retângulo são x e y. Sabe-se que a diferença entre elas é 3 cm. Somando-se 2 cm a cada uma de suas dimensões, a área do retângulo aumenta em 30 cm². Construa, em seu caderno, uma figura que represente essa situação e determine os valores de x e de y. 8 cm e 5 cm

119 Num trapézio retângulo, a base maior e o lado oblíquo têm medidas iguais. A base menor mede 4 cm.
Determine a altura desse trapézio sabendo também que ele tem 32 cm de perímetro e 56 cm² de área. 8 cm

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

120 Resolva as equações fracionárias em seu caderno:

a) $x + \frac{1}{x-3} = 5$, sendo $x \neq 3$ 4

b) $\frac{10}{x-1} = x + 2$, sendo $x \neq 1$ −4 ou 3

c) $\frac{x}{x+2} - 2 = \frac{2}{x-1}$, sendo $x \neq -2$ e $x \neq 1$ −5 ou 0

d) $\frac{x+10}{2} = \frac{4x-2}{x-2}$, sendo $x \neq 2$ −4 ou 4

121 Determine os valores reais de x que satisfazem as equações biquadradas:

a) $5x^4 - 20x^2 = 0$ −2, 0 e 2

b) $3x^4 - 75 = 0$ $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$

c) $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$ −3 e 3

d) $x^2 - \frac{2}{x^2-4} = \frac{3x^2-4}{2}$ $-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{6}$

122 Encontre as raízes reais das seguintes equações irracionais:

a) $\sqrt{x} = \sqrt{13 + \sqrt{x-7}}$ 16

b) $\sqrt{2x-1} = x - 2$ 5

c) $\sqrt{6 + \sqrt{x-1}} = 2\sqrt{2}$ 5

d) $x + 1 = 2\sqrt{x}$ 1

123 Dividindo-se um número real por seu antecessor, obtém-se quatro vezes o inverso dele. Qual é esse número? 2

124 Determine, em seu caderno, dois números inteiros e consecutivos cuja soma dos inversos seja $\frac{9}{20}$. 4 e 5

125 Numa festa escolar, havia 80 pacotes de balas para serem distribuídos entre as crianças. Como 4 crianças foram embora antes da distribuição, cada uma das presentes recebeu um pacote a mais. Quantas eram as crianças? 20 crianças

126 (PUC-MG) Um automobilista faz uma viagem de 660 km viajando a certa velocidade. Se a sua velocidade tivesse sido de mais 5 km por hora, teria demorado uma hora a menos para percorrer aquela distância. Quanto tempo ele gastou? 12 h

127 Resolva no caderno.
(Cesgranrio-RJ) Sejam a e b, respectivamente, a maior e a menor das raízes de $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$. A diferença $a - b$ vale: alternativa a

a) 6
b) 5
c) 4
d) 3
e) 2

128 Encontre o valor procurado em seu caderno.
(PUC-MG) O quociente da divisão de 72 por um número negativo é o dobro desse número. A metade desse número é: alternativa a

a) -3
b) -4
c) -5
d) -6
e) -7

129 Um carro faz um percurso de 600 km em t horas quando sua velocidade é x km/h ($x > 0$). Quando essa velocidade é aumentada para $(x + 20)$ km/h, o tempo para esse carro fazer o mesmo percurso é de $(t - 1)$ horas. Qual a velocidade média desse carro? 100 km/h

130 Calcule o valor de α em seu caderno.
(Fatec-SP) Se o número real α é a solução da equação $\sqrt{4 + 3x} - x = 0$, então α é tal que: alternativa d

a) $\alpha \leq 0$
b) $-2 \leq \alpha \leq 2$
c) $-1 \leq \alpha \leq 3$
d) $1 \leq \alpha \leq 5$

131 Copie a afirmação correta em seu caderno.
(UFV-MG) Sobre a equação irracional $\sqrt{x^2 + 1} = x - 1$ é correto afirmar que: alternativa d

a) possui apenas uma raiz real.
b) é equivalente a uma equação do 2º grau.
c) possui duas raízes reais distintas.
d) não possui raízes reais.
e) é equivalente a uma equação do 1º grau.

132 Um número inteiro é elevado ao quadrado. O quadrado do consecutivo do número obtido é 100. Determine esse número. −3 ou 3

133 Resolvendo a equação $x + \sqrt{x} = 12$, encontramos as raízes 9 e 16. Qual delas é solução dessa equação? 9

134 Pensei em um número. Multipliquei-o por 3 e subtraí 2. Extraí a raiz quadrada do número obtido e encontrei como resultado o mesmo número em que havia pensado. Que número foi esse? 1 ou 2

JOSÉ LUÍS JUHAS

135 Resolva no caderno.
(Fatec-SP) O produto de dois números é 3 e a soma de seus inversos é $\frac{4}{3}$; então, os números são: alternativa a

a) 3 e 1
b) $\frac{1}{3}$ e 9
c) $-\frac{1}{3}$ e -9
d) 1 e $\frac{1}{3}$
e) -3 e -1

136 Resolva o problema em seu caderno.
(UFSE) Percorrendo 30 km à velocidade média v, gasta-se 1 h a mais do que quando se faz o mesmo percurso à velocidade média $v + 1$. (As velocidades estão dadas em quilômetros por hora.) Se o percurso for feito num sentido à velocidade v e no sentido contrário à velocidade $v + 1$, o tempo total gasto para percorrer os 60 km será de: alternativa e

a) 7 h
b) 8 h
c) 9 h
d) 10 h
e) 11 h

CAPÍTULO

5 Triângulos retângulos

1. Um pouco de História

O filósofo grego Pitágoras nasceu na ilha de Samos provavelmente em 570 a.C., cerca de cinquenta anos depois do nascimento de Tales de Mileto.

Filho de rico comerciante, pôde viajar pelo Egito, pela Babilônia e talvez tenha ido até a Índia.

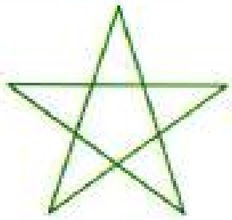
Ao voltar para a Grécia, fixou-se em sua terra natal, mas, descontente com as arbitrariedades do governo de Samos, transferiu-se para Croton, uma colônia grega situada na Itália. Lá, ele fundou a escola pitagórica.

Escultura em homenagem a Pitágoras.

Nessa escola, estudava-se Religião, Filosofia, Política, Música, Astronomia e Matemática. Seus alunos eram divididos em duas categorias: os alunos dos três primeiros anos eram chamados *ouvintes* e os alunos dos anos seguintes, *matemáticos*. Somente aos últimos eram revelados os segredos da Matemática. Aliás, a origem da palavra **matemática** (que significa "o aprendizado da arte, da ciência") é atribuída a Pitágoras.

O lema da escola era "Tudo é número". Nela, procuravam explicar através dos números tudo o que existe na natureza.

Os pitagóricos formaram uma sociedade secreta cujo emblema era um pentágono estrelado — ou pentagrama. A única aspiração deles era o conhecimento. Os estudos dos pitagóricos trouxeram grandes contribuições para a Matemática, principalmente na Geometria. Entre essas contribuições, a de maior sucesso foi sem dúvida o conhecido teorema de Pitágoras.

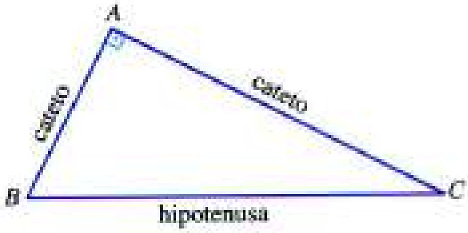


Mesmo depois da morte de Pitágoras, ocorrida por volta de 500 a.C., a sociedade dos pitagóricos continuou a existir por mais de quatro séculos.

2. Elementos de um triângulo retângulo

O triângulo ABC ao lado é um triângulo retângulo, porque possui um ângulo reto (ângulo $\hat{A}$).

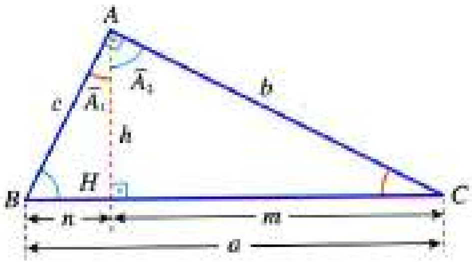
Os lados perpendiculares entre si que formam o ângulo reto num triângulo retângulo denominam-se **catetos**. O lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa**.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

No triângulo retângulo ABC destacamos:

- a que é a medida da hipotenusa $\overline{BC}$
- c que é a medida do cateto $\overline{AB}$, oposto ao ângulo $\hat{C}$
- b que é a medida do cateto $\overline{AC}$, oposto ao ângulo $\hat{B}$
- h que é a medida da altura $\overline{AH}$
- n que é a medida da projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$
- m que é a medida da projeção ortogonal de $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$



Em relação aos ângulos, temos:

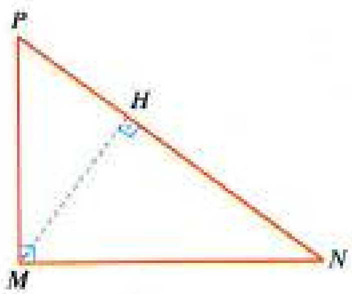
$$\left.\begin{array}{l} m(\hat{A}_1) + m(\hat{B}) = 90° \\ m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 90° \end{array}\right\} \; m(\hat{A}_1) + m(\hat{B}) = m(\hat{B}) + m(\hat{C}), \text{ então } m(\hat{A}_1) = m(\hat{C}) \text{ ou } \hat{A}_1 \equiv \hat{C}$$

$$\left.\begin{array}{l} m(\hat{A}_2) + m(\hat{C}) = 90° \\ m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 90° \end{array}\right\} \; m(\hat{A}_2) + m(\hat{C}) = m(\hat{B}) + m(\hat{C}), \text{ então } m(\hat{A}_2) = m(\hat{B}) \text{ ou } \hat{A}_2 \equiv \hat{B}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Com auxílio de uma régua, em seu caderno, dê a medida:

a) da hipotenusa do triângulo retângulo MNP; 5 cm
b) do cateto oposto ao $\hat{N}$; 3 cm
c) do cateto adjacente ao $\hat{N}$; 4 cm
d) do cateto oposto ao $\hat{P}$; 4 cm
e) do cateto adjacente ao $\hat{P}$; 3 cm
f) da altura relativa à hipotenusa; 2,4 cm
g) da projeção ortogonal do cateto menor sobre a hipotenusa; 1,8 cm
h) da projeção ortogonal do cateto maior sobre a hipotenusa. 3,2 cm



NELSON MATSUDA

2 Desenhe, em seu caderno, um triângulo retângulo em que os catetos meçam 4,2 cm e 5,6 cm. construção de figura

a) Obtenha, com auxílio de uma régua, a medida aproximada da hipotenusa desse triângulo. 7 cm

b) Verifique se o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. sim

3 Usando régua e compasso, construa os triângulos de medidas: construção de figuras

- 2 cm, 4 cm e 5 cm
- 2 cm, 3,5 cm e 4 cm
- 4,2 cm, 5,6 cm e 7 cm

3.a) obtusângulo; acutângulo; retângulo.

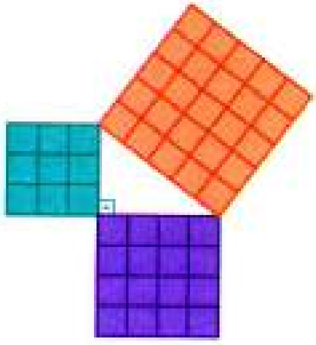
a) Classifique os triângulos construídos de acordo com as medidas dos ângulos.

b) Para cada triângulo, estabeleça uma relação entre o quadrado do maior lado e a soma dos quadrados dos outros dois lados.

3.b) • $25 > 4 + 16$;
• $16 < 4 + 12{,}25$;
• $49 = 17{,}64 + 31{,}36$.

3. Teorema de Pitágoras

Considerando como unidade de medida a área de um quadradinho da figura ao lado, nota-se que a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores, ou seja:



NELSON MATSUDA

$$25 = 9 + 16$$

Como $25 = 9 + 16$, temos $5^2 = 3^2 + 4^2$

Repare que 5, 3 e 4 são as medidas dos lados dos quadrados da figura e, consequentemente, as medidas dos respectivos lados do triângulo retângulo.

A relação existente entre os quadrados das medidas dos lados desse triângulo retângulo é conhecida como **teorema de Pitágoras**.

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Existem mais de trezentas demonstrações do teorema de Pitágoras. Vamos apresentar uma que faz uso da equivalência de áreas.

Considerando um triângulo retângulo, construímos quadrados sobre a hipotenusa de medida a e sobre os catetos de medidas b e c, como mostra a figura 1.

Nas figuras 2 e 3, construímos quadrados de lados que medem $(b + c)$.

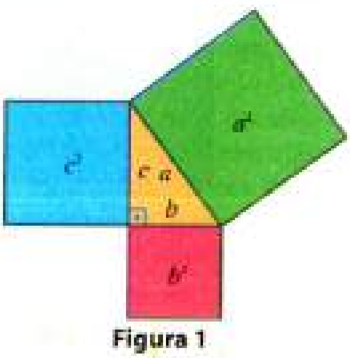


Figura 1

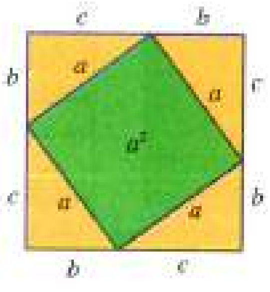


Figura 2

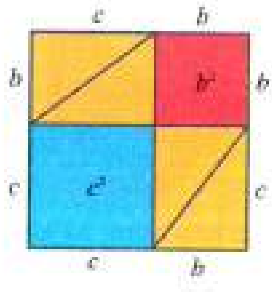


Figura 3

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

O quadrado da figura 2 é formado por quatro triângulos retângulos, congruentes ao triângulo da figura 1, e pelo quadrado verde. Então, a área do quadrado de lado de medida $(b + c)$ é a soma das áreas dos quatro triângulos com a área do quadrado verde.

O quadrado da figura 3 é formado por quatro triângulos retângulos, congruentes ao triângulo da figura 1, pelo quadrado azul e pelo quadrado rosa. Então, a área do quadrado de lado de medida $(b + c)$ é a soma das áreas dos quatro triângulos com as áreas dos quadrados azul e rosa.

Logo, a área do quadrado verde é a soma da área do quadrado azul com a área do quadrado rosa, ou seja:

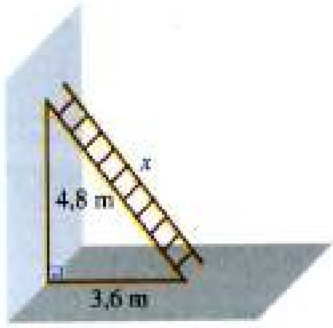
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Vejamos agora um exemplo de aplicação do teorema de Pitágoras.

Precisamos calcular a medida x do comprimento de uma escada que está apoiada em uma parede, conforme a figura.

Para isso, vamos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$x^2 = (4{,}8)^2 + (3{,}6)^2$$
$$x^2 = 23{,}04 + 12{,}96$$
$$x^2 = 36$$
$$x = \pm\sqrt{36}$$
$$x = \pm 6$$

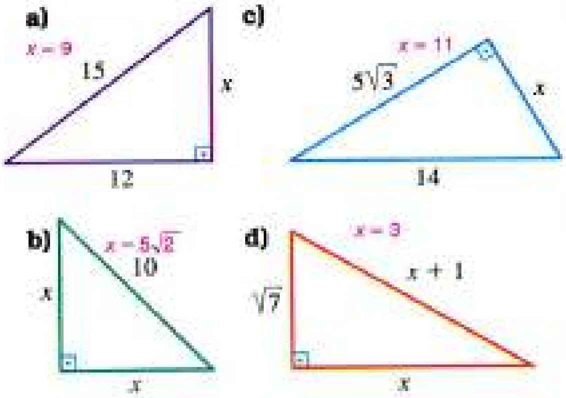


NELSON MATSUDA

Como x é a medida do comprimento da escada, deve ser um número positivo. Portanto, o comprimento da escada é 6 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

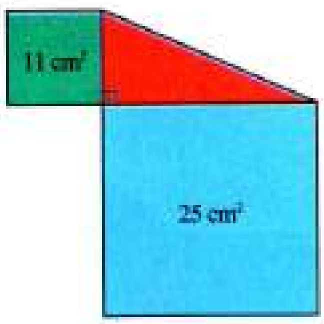
4 Calcule o valor de x aplicando o teorema de Pitágoras:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

5 Em um esquadro, os lados perpendiculares medem 12 cm e $12\sqrt{3}$ cm. Quanto mede o lado oposto ao ângulo reto desse esquadro? 24 cm

6 Considere os quadrados coloridos de verde e de azul representados na figura abaixo e faça o que se pede em seu caderno.



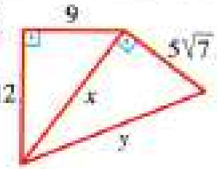
NELSON MATSUDA

a) Determine a área do triângulo alaranjado. $2{,}5\sqrt{11}$ cm²

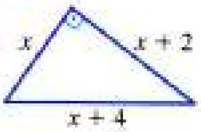
b) Calcule a medida da hipotenusa desse triângulo. 6 cm

7 Aplicando o teorema de Pitágoras, determine em seu caderno as medidas x e y indicadas.

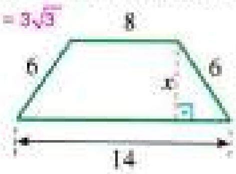
a) $x = 15$ e $y = 20$



b) $x = 6$



c) $x = 3\sqrt{3}$



8 As diagonais de um losango medem 12 cm e 16 cm. Em seu caderno:

a) determine a medida do lado desse losango; 10 cm

b) calcule a área desse losango. 96 cm²

9 Em um triângulo isósceles, a base mede 12 cm e cada um dos lados congruentes mede 9 cm. Em seu caderno, faça um esboço desse triângulo e calcule a medida da altura desse triângulo. $3\sqrt{5}$ cm

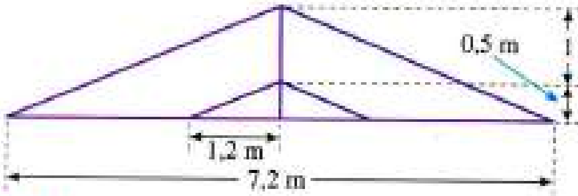
10 Responda em seu caderno: quantos metros de arame são necessários para cercar, com 6 voltas, um terreno que tem a forma de um trapézio retângulo, cujas bases medem 12 m e 20 m e o lado oblíquo mede 10 m? 288 m

11 Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede $3\sqrt{5}$ m e as medidas dos catetos são expressas por x e $x + 3$. Calcule, em seu caderno, a medida dos catetos. 3 m e 6 m

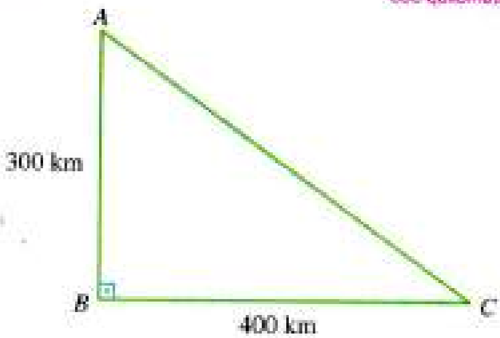
12 Um bambu é quebrado pelo vento a 4,8 m de altura. Ele tomba de modo que sua ponta toca o chão a 3,6 m de sua base. Em seu caderno, determine a altura desse bambu. 10,8 m

13 Resolva o problema em seu caderno. Para reforçar a sustentação de uma placa de propaganda com formato retangular, medindo 2 m de comprimento por 5 m de largura, foram colocadas duas ripas de madeira no sentido das diagonais da placa. Qual é o comprimento aproximado de cada ripa? 5,38 m

14 A figura abaixo representa a estrutura de madeira do telhado de uma residência. A base tem 7,2 m. Quantos metros de madeira são necessários para construir as outras partes dessa estrutura? 11,9 m



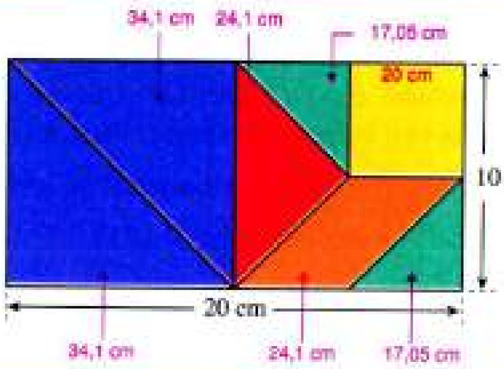
15 Com auxílio da figura, responda à questão em seu caderno. Um avião sai da cidade A e vai até a cidade B, que está à distância de 300 quilômetros. Depois, decola em direção à cidade C, a 400 quilômetros de distância. Se o avião fosse da cidade A para a C, em linha reta, quantos quilômetros percorreria? 500 quilômetros



Pense mais um pouco...

Já vimos que o *tangram* é formado por 7 peças: cinco triângulos retângulos isósceles, sendo dois grandes, um médio e dois pequenos; um quadrado e um paralelogramo. Com essas 7 peças, é possível montar muitas figuras. Observe, por exemplo, o retângulo ao lado, feito com as peças do *tangram*.

Determine, em seu caderno, o perímetro aproximado de cada uma das 7 peças desse *tangram*. Use para $\sqrt{2}$ o valor aproximado 1,41.



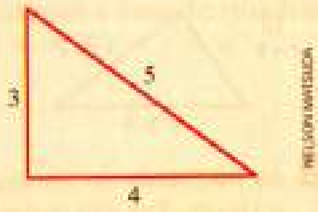
PARA SABER mais

Triângulos pitagóricos

Triângulos retângulos cujas medidas dos lados são expressas por números inteiros são chamados de **triângulos pitagóricos**.

Entre os triângulos pitagóricos, o mais famoso é o que tem os lados expressos por três números inteiros e consecutivos: 3, 4 e 5.

Pelo caso L.L.L. de semelhança, qualquer outro triângulo retângulo que tenha os lados proporcionais aos números 3, 4 e 5 são triângulos pitagóricos.



Agora é com você!

Reúna-se com um colega, usem uma calculadora e façam o que se pede, no caderno.

a) Um dos catetos de um triângulo pitagórico mede 15 cm. Determinem os quatro possíveis pares de medidas do outro cateto e da hipotenusa desse triângulo. 20 cm e 25 cm; 8 cm e 17 cm; 36 cm e 39 cm; 112 cm e 113 cm

b) A hipotenusa de um triângulo pitagórico semelhante ao triângulo de lados que medem 3 cm, 4 cm e 5 cm, mede 35 cm. Determinem o perímetro e a área desse triângulo. 84 cm e 294 cm²

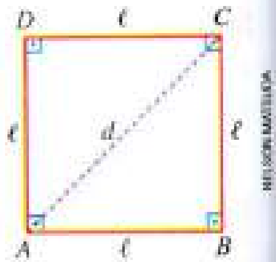
c) O perímetro de um triângulo pitagórico semelhante ao triângulo de lados que medem 3 cm, 4 cm e 5 cm, é 108 cm. Determinem a medida dos catetos e da hipotenusa desse triângulo. 27 cm, 36 cm e 45 cm

4. Aplicações do teorema de Pitágoras

Relacionando as medidas da diagonal e do lado de um quadrado

Considere o quadrado *ABCD*, com lado medindo ℓ e diagonal, d.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo *ABC*, temos:



$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$
$$d^2 = 2\ell^2$$
$$d = \sqrt{2\ell^2}$$
$$d = \ell\sqrt{2}$$

A expressão $d = \ell\sqrt{2}$ permite calcular a diagonal de um quadrado quando se conhece a medida de seu lado, e vice-versa. Veja, a seguir, alguns exemplos.

a) Calcular a medida da diagonal de um quadrado cujo perímetro é 12 cm.

Se $P = 12$ cm, então $\ell = 3$ cm.

$d = \ell\sqrt{2}$

$d = 3\sqrt{2}$

Logo, a diagonal desse quadrado mede $3\sqrt{2}$ cm.

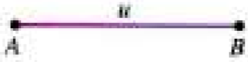
b) Calcular a medida do lado de um quadrado cuja diagonal mede $7\sqrt{2}$ cm.

Substituímos d por $7\sqrt{2}$ em $d = \ell\sqrt{2}$.

$$\ell\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$
$$\ell = 7$$

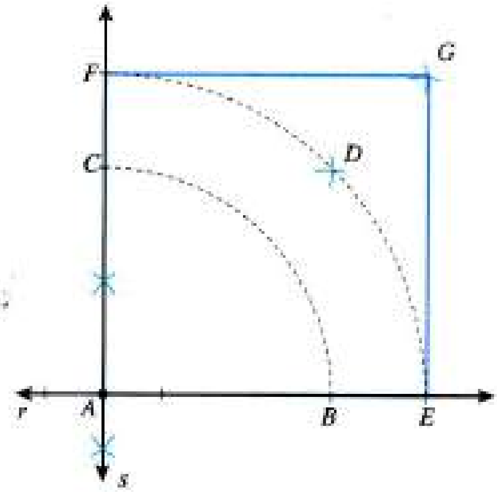
Logo, o lado desse quadrado mede 7 cm.

c) Construir um quadrado em que o lado meça $\sqrt{2}u$, sendo u a medida de um segmento dado.

Dado o segmento 

Usando régua e compasso podemos seguir os seguintes passos:

- transportamos $\overline{AB}$ para uma reta r;
- por A, traçamos a reta s, perpendicular a r;
- com abertura do compasso igual a u, traçamos três arcos: com centro em A, obtemos o ponto C em s; com centro em B, e depois em C, obtemos o ponto D;
- com abertura do compasso igual a AD $\left(AD = \sqrt{2}u\right)$, traçamos três arcos: com centro em A, obtemos o ponto E em r e o ponto F em s; com centro em E, e depois em F, obtemos o ponto G.
- traçamos $\overline{EG}$ e $\overline{FG}$ e obtemos o quadrado $ABGF$, com lado de medida $\sqrt{2}u$.



NELSON MATSUDA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

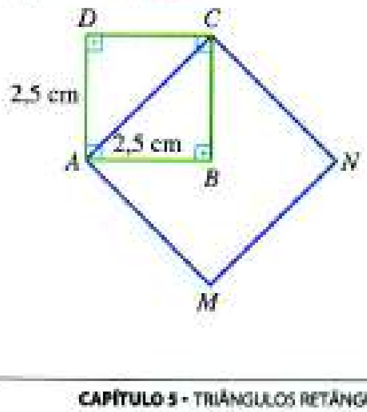
16 Resolva o problema em seu caderno. O lado de um quadrado $ABCD$ mede 15 cm.

a) Determine a medida de sua diagonal. $\ell = 15\sqrt{2}$ cm

b) Calcule a área do quadrado cujo lado tem a mesma medida da diagonal do quadrado $ABCD$. 450 cm²

17 A diagonal de um quadrado mede $10\sqrt{2}$ cm. Colocam-se três desses quadrados um ao lado do outro, de modo que se forme um retângulo. Calcule, em seu caderno, o perímetro desse retângulo. 80 cm

18 Calcule, em seu caderno, a área do quadrado $AMNC$, no qual B é ponto médio de uma de suas diagonais. 12,50 cm²

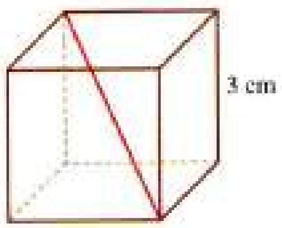


NELSON MATSUDA

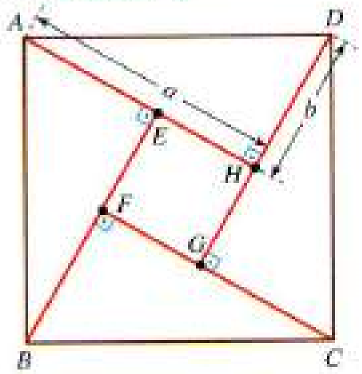
Pense mais um pouco...

Em seu caderno, faça o que se pede.

1. Quanto mede a diagonal do cubo abaixo, destacada em vermelho? $3\sqrt{3}$ cm



2. Mostre que, se *ABCD* é um quadrado, a área do quadrado *EFGH* é igual a $(a - b)^2$. demonstração



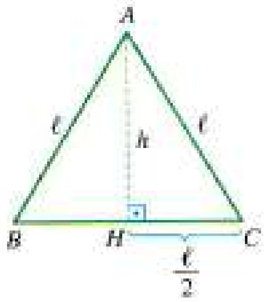
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Relacionando as medidas da altura e do lado de um triângulo equilátero

Considere o triângulo equilátero *ABC*, com lado medindo ℓ e altura, *h*.

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$(AH)^2 + (HC)^2 = (AC)^2$$
$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2$$
$$h^2 + \frac{\ell^2}{4} = \ell^2$$
$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$
$$h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}$$
$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$



NELSON MATSUDA

A fórmula $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ permite calcular a altura do triângulo equilátero quando se conhece a medida do lado desse triângulo, e vice-versa. Veja os exemplos a seguir.

a) Calcular a medida da altura de um triângulo equilátero de 18 cm de perímetro.

Se $P = 18$ cm, então $\ell = 6$ cm.

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$
$$h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Logo, a medida da altura desse triângulo é $3\sqrt{3}$ cm.

b) Calcular a medida do lado de um triângulo equilátero cuja altura mede $6\sqrt{3}$ cm.

Substituímos *h* por $6\sqrt{3}$ em $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$:

$$6\sqrt{3} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$
$$\ell\cancel{\sqrt{3}} = 12\cancel{\sqrt{3}}$$
$$\ell = 12$$

Logo, o lado desse triângulo mede 12 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

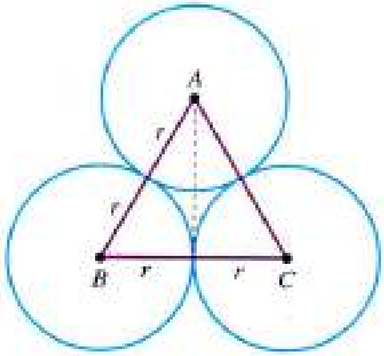
19 O lado de um triângulo equilátero mede 12 cm. Calcule, em seu caderno, a medida da altura desse triângulo. $6\sqrt{3}$ cm

20 Determine, em seu caderno, a área de um triângulo equilátero cuja altura mede $12\sqrt{3}$ cm. $144\sqrt{3}$ cm²

21 Com um barbante de 48 cm, contorna-se exatamente um triângulo equilátero. Quanto mede a altura desse triângulo? $8\sqrt{3}$ cm

22 O lado de um triângulo equilátero tem a mesma medida que a diagonal de um quadrado com 25 cm de lado. Calcule a medida da altura desse triângulo. $\frac{25\sqrt{6}}{2}$ cm

23 Na figura abaixo, cada circunferência tem 1,5 cm de raio. Determine, em seu caderno, a área do triângulo *ABC*. $2{,}25\sqrt{3}$ cm²



Pense mais um pouco...

Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

Recortem, em um papel quadriculado, vinte triângulos retângulos congruentes tais que a medida de um cateto (x cm) seja o dobro da medida do outro cateto ($2x$ cm). Disponham os triângulos lado a lado sobre a carteira de modo que formem um quadrado.

Responda no caderno: qual é a medida do lado desse quadrado? $2x\sqrt{5}$ cm

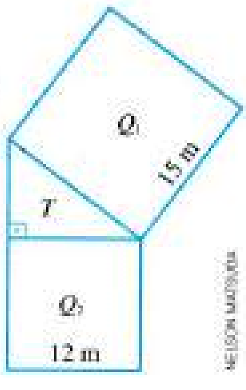
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

24 Resolva a questão no caderno.

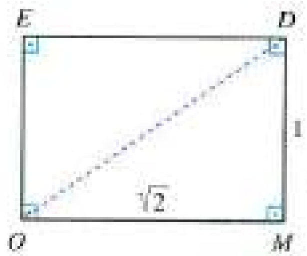
(Saresp) Na figura abaixo, tem-se os quadrados Q_1 e Q_2.

A área do triângulo *T*, em metros quadrados, é igual a: alternativa c

a) 100
b) 76
c) 54
d) 48



25 Considere a figura a seguir e responda à questão em seu caderno.

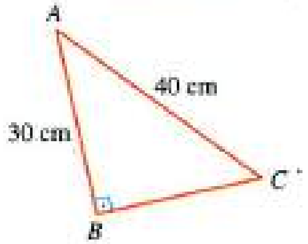


a) Qual o perímetro do $\triangle ODM$? $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) Considere um quadrado de lado de medida OD. Qual a área desse quadrado? 3

26 Resolva a questão no caderno.

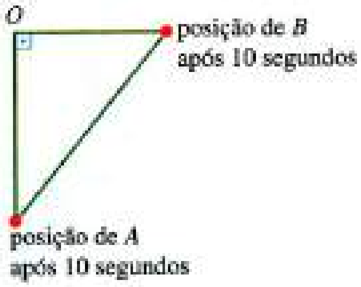
(UPF-RS) Para que o triângulo *ABC* da figura seja retângulo em *B*, o lado $\overline{BC}$ deve medir aproximadamente: alternativa c



NELSON MATSUDA

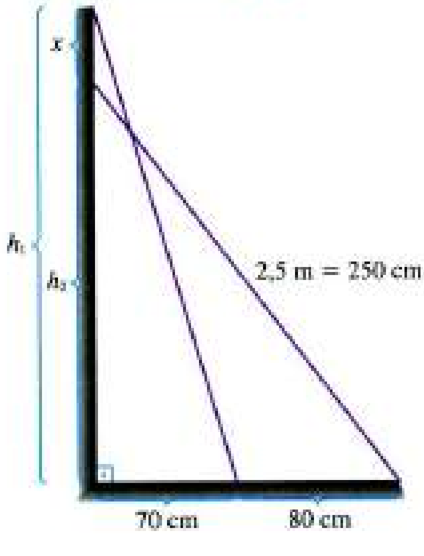
a) 10 cm
b) 20 cm
c) 26,45 cm
d) 28,28 cm
e) 50 cm

27 Dois ciclistas, *A* e *B*, partem de um ponto *O* e movem-se em direção perpendicular um ao outro, à velocidade de 16 metros por segundo e 12 metros por segundo, respectivamente. Que distância os separa após 10 segundos? 200 m



NELSON MATSUDA

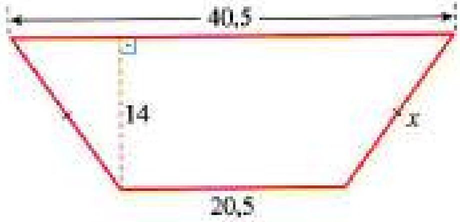
28 Uma escada de 2,5 m de comprimento estava apoiada em um muro, do qual o pé da escada distava 70 cm. O pé afastou-se 80 cm de onde se encontrava. Quantos centímetros a parte superior da escada se deslocou para baixo? 40 cm



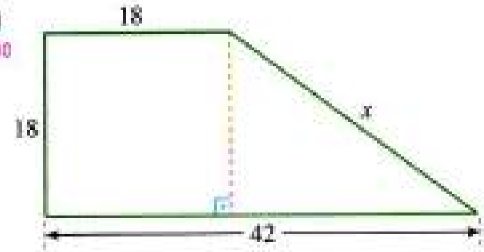
NELSON MATSUDA

29 Calcule o valor de *x* em seu caderno.

a) $x = 2\sqrt{74}$

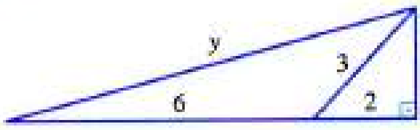


b) $x = 30$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

30 Determine, em seu caderno, o valor de *y* na figura. $y = \sqrt{69}$

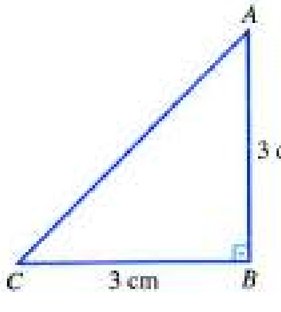


NELSON MATSUDA

31 Em um trapézio retângulo *ABCD*, a altura $\overline{AD}$ mede 6 m, a base menor $\overline{DC}$ mede 3,5 cm e a diagonal maior $\overline{BD}$ mede 10 cm. Determine em seu caderno:

a) a medida da base maior; 8 cm
b) a medida do lado oblíquo; 7,5 cm
c) o perímetro desse trapézio; 25 cm
d) a área desse trapézio. 34,5 cm²

32 Construa no caderno o triângulo retângulo *ABC* conforme indica a figura. Em seguida, construa uma perpendicular à hipotenusa $\overline{CA}$ pelo ponto *C*. Marque sobre essa perpendicular um ponto *D*, tal que *CD* = 3 cm. Unindo *D* com *A* você obterá o triângulo *CDA*. Trace uma perpendicular a $\overline{AD}$ pelo ponto *D* e marque sobre essa perpendicular um ponto *E*, tal que *DE* = 3 cm. Unindo *E* com *A*, você obterá outro triângulo retângulo *DEA*. Qual é a medida da hipotenusa deste triângulo? 6 cm

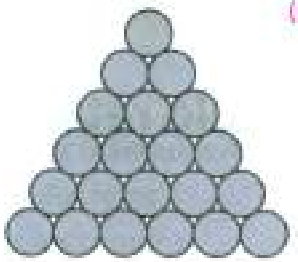


NELSON MATSUDA

33 Abalada por uma tempestade, uma torre metálica corre o risco de cair. Peritos da área de edificações foram chamados para avaliar a situação. Resolveram, então, firmar a torre amarrando a seu topo dois cabos de aço, cada um com 12 m de comprimento, fixados no chão a 6 m da base da torre. Determine, em seu caderno, a altura dessa torre. $6\sqrt{3}$ m

34 A figura representa a vista frontal de uma pilha de latas de leite em pó deitadas. Determine, em seu caderno, a altura da pilha sabendo que o raio de cada lata é 4,5 cm.

$(5\sqrt{3} + 2) \cdot 4,5$

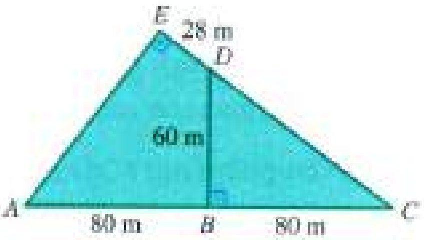


35 Num triângulo isósceles, cada lado congruente mede 15 cm. Determine, em seu caderno, a área desse triângulo sabendo que sua base mede 24 cm. 108 cm²

36 É possível colocar um lápis de 18 cm num estojo retangular de 12 cm por 15 cm? Justifique sua resposta.

Sim, coloca-se o lápis no sentido da diagonal.

37 Considere a figura seguinte e faça o que se pede em seu caderno.



a) Determine as medidas CD, EC e AE. 100 m, 128 m e 96 m

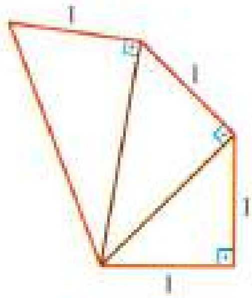
b) Determine as áreas dos $\triangle ACE$ e $\triangle BCD$. 6.144 m² e 2.400 m²

c) Calcule a área do quadrilátero $ABDE$. 3.744 m²

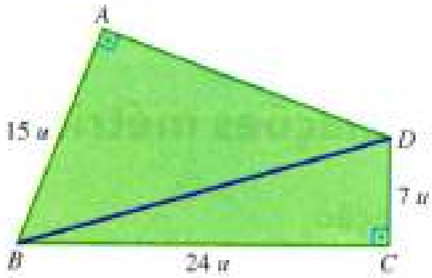
38 Um losango tem 60 cm de perímetro. Sabendo que a diagonal maior desse losango mede 26 cm, calcule a medida da diagonal menor. $4\sqrt{14}$ cm

39 As dimensões de um retângulo são expressas por $x + 1$ e $x - 2$. Sabendo que a área dele é 18 cm², determine a medida de sua diagonal. $3\sqrt{5}$ cm

40 Determine a soma dos segmentos **laranjas** da figura a seguir. 6 cm



41 Considere a figura abaixo.

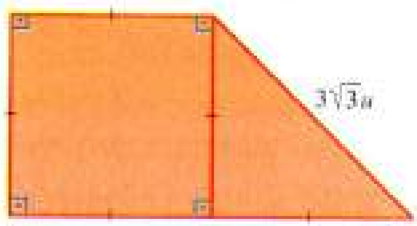


Determine, em seu caderno:

a) a medida do segmento $\overline{BD}$; 25u

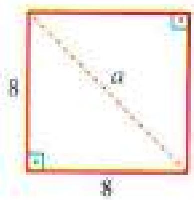
b) a área do quadrilátero $ABCD$. 234u²

42 Qual é a área da figura a seguir? 20,25u²

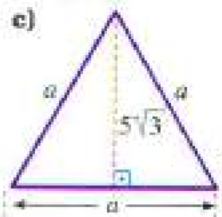


43 Determine, em seu caderno, o valor de a nas figuras:

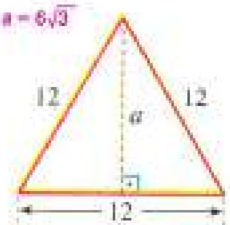
a) $a = 8\sqrt{2}$



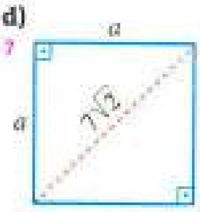
c) $a = 10$



b) $a = 6\sqrt{3}$

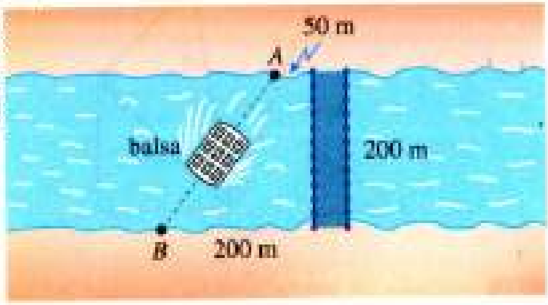


d) $a = 7$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

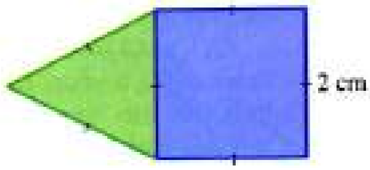
44 Uma balsa está fazendo a travessia de veículos e transeuntes, pois a ponte sobre o rio foi interditada. Ela parte do ponto A e chega ao ponto B.



a) Quantos metros a balsa percorre nessa travessia? 250 m

b) Se a balsa demorar 5 minutos para fazer essa travessia, qual será a velocidade média em quilômetros por hora? 3 km/h

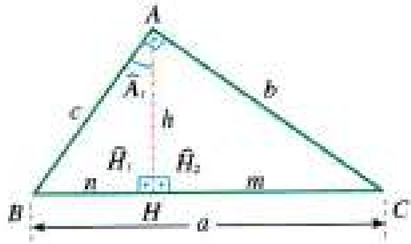
45 Considere a figura abaixo e calcule sua área em seu caderno. $(4 + \sqrt{5})$ cm²



5. Relações métricas em um triângulo retângulo

1ª relação

Considere o triângulo ABC ao lado. Traçando a altura relativa à hipotenusa, obtemos alguns pares de triângulos semelhantes.



1. Comparando os triângulos ABC e HBA, temos:

- $\widehat{A} \cong \widehat{H}_1$ (ângulos retos)
- $\widehat{B} \cong \widehat{B}$ (ângulo comum)

Logo, pelo caso A.A., os triângulos ABC e HBA são semelhantes e, portanto, os lados desses triângulos são proporcionais.

Então, podemos escrever a proporção:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}\text{, ou seja, } \boldsymbol{c^2 = an}$$

2. Comparando os triângulos ABC e HAC, temos:

- $\widehat{A} \cong \widehat{H}_2$ (ângulos retos)
- $\widehat{C} \cong \widehat{C}$ (ângulo comum)

Do mesmo modo, pelo caso A.A., os triângulos ABC e HAC são semelhantes. Portanto:

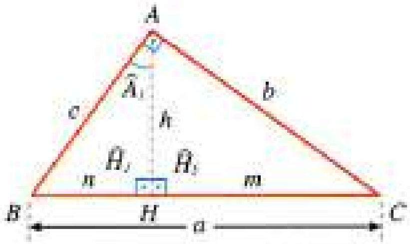
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}\text{, ou seja, } \boldsymbol{b^2 = am}$$

O quadrado da medida de cada cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção ortogonal desse cateto sobre ela.

2ª relação

Comparando os triângulos ABH e CAH, temos:

- $\hat{H}_1 \cong \hat{H}_2$ (ângulos retos)
- $\hat{A}_1 \cong \hat{C}$ (ambos têm por complemento o ângulo $\hat{B}$)



Logo, pelo caso A.A., os triângulos ABH e CAH são semelhantes. Portanto:

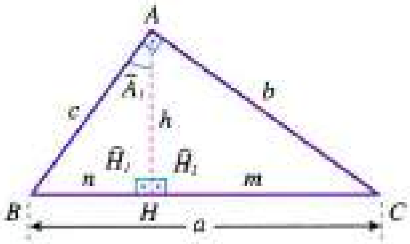
$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h}\text{, ou seja, } \boldsymbol{h^2 = mn}$$

O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre ela.

3ª relação

Comparando os triângulos ABC e HAC, temos:

- $\hat{A} \cong \hat{H}_2$ (ângulos retos)
- $\hat{C} \cong \hat{C}$ (ângulos comuns)



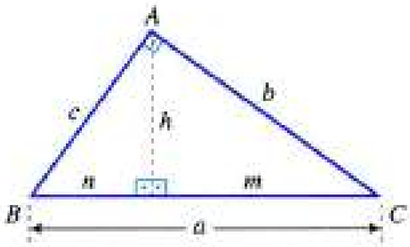
Logo, pelo caso A.A., os triângulos ABC e HAC são semelhantes. Portanto:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h}\text{, ou seja, } \boldsymbol{bc = ah}$$

O produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.

Outra demonstração do teorema de Pitágoras

Dado um triângulo retângulo ABC, vamos provar que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma das medidas dos quadrados dos catetos.



Hipótese {$\triangle ABC$ é um triângulo retângulo em A

Tese {$b^2 + c^2 = a^2$

Demonstração

Como o quadrado da medida de cada cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção ortogonal desse cateto sobre ela, temos:

$$b^2 = am \text{ e } c^2 = an$$

Somando membro a membro essas duas igualdades, temos:

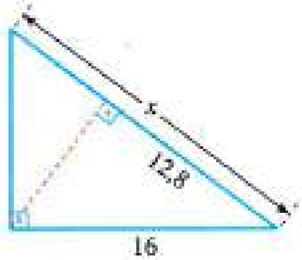
$$b^2 + c^2 = an + am$$
$$b^2 + c^2 = a(n + m) \quad \textbf{Colocamos } \boldsymbol{a} \textbf{ em evidência}$$
$$b^2 + c^2 = a \cdot a \quad \textbf{Substituímos } \boldsymbol{(m + n)} \textbf{ por } \boldsymbol{a}$$
$$\boldsymbol{b^2 + c^2 = a^2}$$

Desse modo também provamos o teorema de Pitágoras.

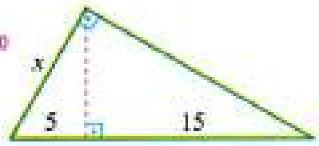
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

46 Aplicando as relações métricas dos triângulos retângulos, calcule, em seu caderno, o valor de x.

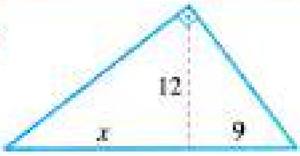
a) $x = 20$



b) $x = 10$



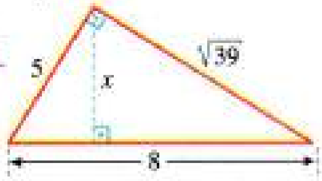
c) $x = 16$



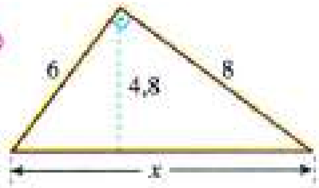
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

47 Aplique as relações métricas dos triângulos retângulos e calcule o valor de x.

a) $x = \frac{5\sqrt{39}}{8}$



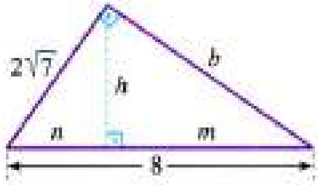
b) $x = 10$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

48 Calcule, em seu caderno, as medidas indicadas por letras no triângulo retângulo abaixo.

$b = 6$
$m = 4,5$
$n = 3,5$
$h = \frac{3\sqrt{7}}{2}$

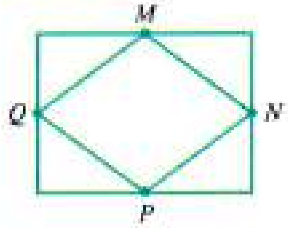


NELSON MATSUDA

49 As projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa medem 1,8 cm e 3,2 cm. Determine a medida dos catetos desse triângulo. 3 cm e 4 cm

50 Resolva a questão no caderno.

(Unifor-CE) Na figura a seguir, tem-se um retângulo cujos lados medem 8 cm e 6 cm. Os pontos M, N, P e Q são pontos médios dos lados. alternativa a



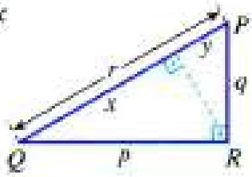
NELSON MATSUDA

O perímetro do quadrilátero $MNPQ$ é:

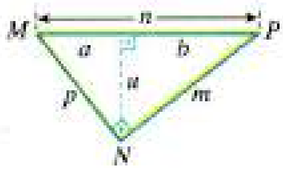
a) 20 cm
b) 24 cm
c) 32 cm
d) 36 cm
e) 52 cm

51 Aplique os casos de semelhança entre triângulos para provar que:

a) $p^2 = rx$



b) $u^2 = ab$

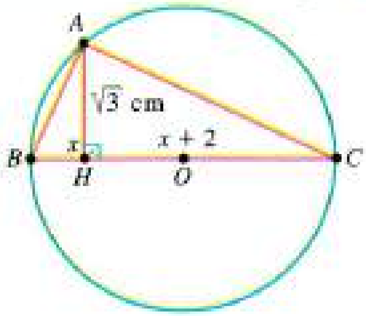


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

52 (UFPE) Quanto mede, em cm, a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 15 cm e 20 cm? 12 cm

53 A área do triângulo retângulo RST é 36 cm². Determine o produto da medida da hipotenusa pela medida da altura referente à hipotenusa. 72 cm

54 Determine, em seu caderno, a medida do diâmetro da circunferência da figura. 4 cm



NELSON MATSUDA

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

55 Resolva a questão no caderno.

(UEL-PR) As medidas, em centímetro, dos três lados de um triângulo retângulo são expressas por $(x - 2)$, x e $(x + 2)$. A medida, em centímetro, da hipotenusa desse triângulo é:

alternativa c

a) 5 **b)** 8 **c)** 10 **d)** 12 **e)** 14

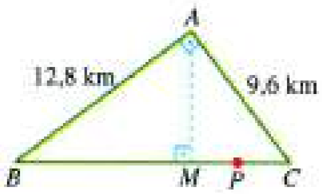
56 A medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é 12 cm e um dos segmentos determinados por essa altura sobre a hipotenusa mede 9 cm. Calcular a medida dos catetos desse triângulo.

15 cm e 20 cm

57 O cateto de um triângulo retângulo e a projeção desse cateto sobre a hipotenusa medem 1 cm e $\frac{\sqrt{5}}{5}$ cm, respectivamente. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

$\sqrt{5}$ cm

58 A figura abaixo mostra o esquema do roteiro de uma prova de ciclismo.



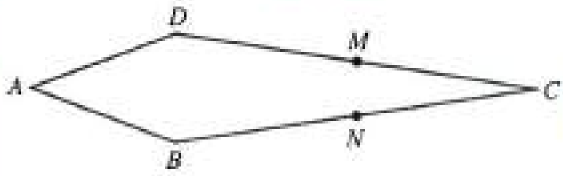
A sequência do percurso é:

$$A \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow P$$

O ponto P está a 80 metros do ponto M. Quantos quilômetros tem esse percurso?

46 km

59 No quadrilátero $ABCD$ abaixo, $m(A\hat{B}C) = 150°$, $AD = AB = 4$ cm, $BC = 10$ cm, $MN = 2$ cm, sendo M e N, respectivamente, os pontos médios de $\overline{CD}$ e $\overline{BC}$. alternativa c



Calcule, em seu caderno, a área do triângulo BCD.

60 (FEI-SP) Se em um triângulo os lados medem 9, 12 e 15 cm, então a altura relativa ao maior lado mede: alternativa b

a) 8,0 cm **c)** 6,0 cm **e)** 4,3 cm
b) 7,2 cm **d)** 5,6 cm

61 Resolva a questão no caderno.

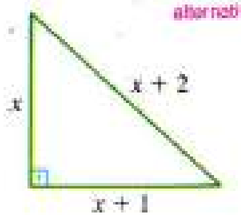
(FEI-SP) Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa mede 12 cm e a diferença entre as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa é 7 cm. A hipotenusa desse triângulo mede: alternativa d

a) 10 cm **c)** 20 cm **e)** 30 cm
b) 15 cm **d)** 25 cm

62 (Ulbra-RS) A área do triângulo a seguir mede 6 m². O valor do perímetro desse triângulo é:

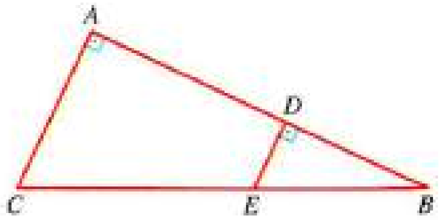
alternativa d

a) 6 m
b) 9 m
c) 10 m
d) 12 m
e) 20 m



63 Resolva a questão no caderno.

(Unifor-CE) No triângulo retângulo representado na figura abaixo, têm-se $AB = 12$ cm e $AC = 9$ cm.



Se o ponto D divide o segmento $\overline{AB}$ na razão de 2 para 1, então a razão entre os perímetros do quadrilátero $ADEC$ e do triângulo DBE, nessa ordem, é igual a: alternativa b

a) $\frac{16}{5}$ **c)** $\frac{5}{3}$ **e)** $\frac{1}{5}$

b) $\frac{5}{2}$ **d)** $\frac{3}{2}$

64 Resolva a questão no caderno.

(UFPE) Um barco navegou 10 km para o oeste, depois 5 km para o sul, depois 13 km para o leste, e finalmente 9 km para o norte. Onde o barco parou relativamente ao ponto de partida? alternativa e

a) 5 km ao norte
b) 3 km a sudeste
c) 4 km ao sul
d) 3 km a sudoeste
e) 5 km a nordeste

CAPÍTULO 6

Razões trigonométricas nos triângulos retângulos

1. A Trigonometria

A palavra **trigonometria**, de origem grega, significa "medida de triângulos". Como o nome sugere, a Trigonometria é a parte da Matemática que estuda as relações entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos de um triângulo.

Embora não tenhamos informações precisas sobre a origem desse estudo, há registros de sua aplicação por babilônios e antigos egípcios, especialmente na Agrimensura e na Astronomia.

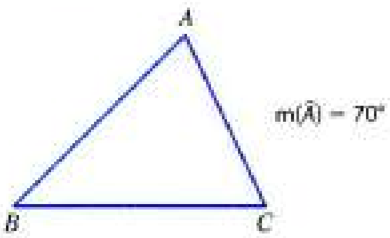
A Trigonometria era usada, por exemplo, para determinar distâncias que não podiam ser medidas com instrumentos, como entre planetas. Para isso, eram aplicadas certas propriedades sobre as relações entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos de um triângulo.

2. As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente

Com o auxílio de uma régua, podemos determinar a medida do segmento $\overline{AB}$:

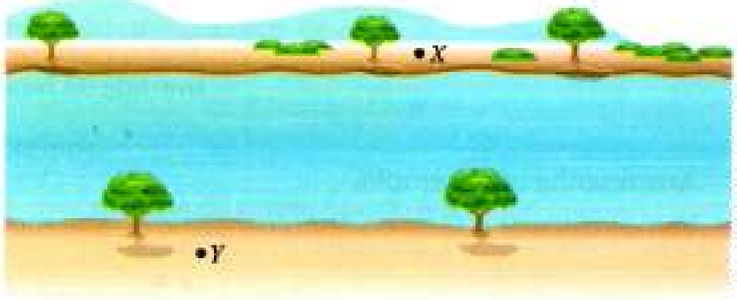
$AB = 7{,}5$ cm

Com um transferidor, podemos determinar a medida do ângulo interno $\hat{A}$ do $\triangle ABC$ a seguir:



Porém, existem situações em que não é possível calcular diretamente a distância entre dois pontos ou a amplitude de um ângulo.

Por exemplo, quando se deseja medir a distância entre dois pontos inacessíveis, como X e Y (ao lado), localizados em margens opostas de um rio.

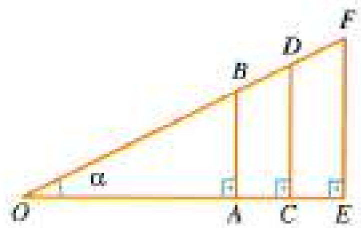


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Procurando resolver problemas dessa natureza, os matemáticos estabeleceram importantes relações entre as medidas dos ângulos e as medidas dos lados de um triângulo.

Seno de um ângulo agudo

Considere a figura ao lado. Os triângulos retângulos OAB, OCD e OEF são semelhantes pelo caso A.A., pois possuem o ângulo comum de medida α (também chamado de ângulo α) e um ângulo reto.



NELSON MATSUDA

Como os triângulos OAB e OCD são semelhantes, os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{OA}{OC} = \underbrace{\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}}$$

Considerando os triângulos OAB e OEF, que são semelhantes, temos:

$$\frac{OA}{OE} = \underbrace{\frac{OB}{OF} = \frac{AB}{EF}}$$

Vamos considerar duas dessas proporções: $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$ e $\frac{OB}{OF} = \frac{AB}{EF}$

Da propriedade fundamental das proporções, podemos escrever:

$$\frac{CD}{OD} = \frac{AB}{OB} \text{ e } \frac{EF}{OF} = \frac{AB}{OB}$$

Assim, temos: $\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$

Há infinitos outros triângulos retângulos que têm como ângulo interno o ângulo α e que, por isso, também são semelhantes aos triângulos OAB, OCD e OEF.

Para todos esses triângulos retângulos, a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α e a medida da hipotenusa é constante. A essa razão constante chamamos de **seno do ângulo** α e a indicamos por **sen** α.

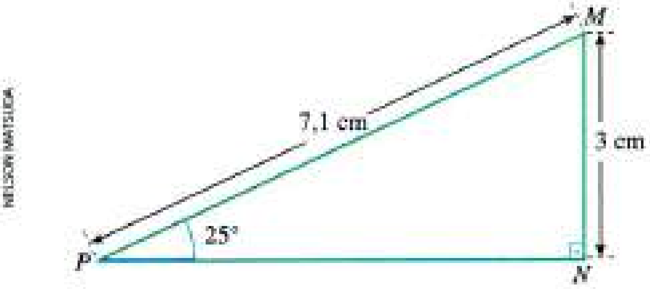
> **Seno** de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

Considerando qualquer um desses triângulos, temos:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Acompanhe um exemplo.

Vamos calcular o seno do ângulo interno $\widehat{P}$, que mede 25°, do triângulo *MNP*.



$$\text{sen}\ 25° = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \widehat{P}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{sen}\ 25° = \frac{3}{7,1}$$

$$\text{sen}\ 25° \simeq 0,42$$

No exercício 2, pode-se também propor, como variação do problema, manter os ângulos do triângulo e alterar a medida de seu lado, por exemplo $AC = 8$ cm. Dessa forma, os alunos poderão constatar que, nos dois casos, as razões não variam.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Em seu caderno, construa um triângulo retângulo com um dos ângulos internos medindo 30°. Com uma régua, determine a medida aproximada, em milímetro, do cateto oposto ao ângulo de 30° e da hipotenusa.

a) Qual é o valor da razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de 30° e a medida da hipotenusa desse triângulo? 0,5

b) Indique o valor de sen 30°. 0,5

2 No caderno, construa um triângulo *ABC*, retângulo em $\widehat{B}$, em que se tenha $m(\widehat{C}) = 40°$ e $AC = 10$ cm. Com uma régua encontre, em milímetro, a medida aproximada do cateto $\overline{AB}$. Qual é o valor aproximado, com uma casa decimal, de sen 40°? 0,6

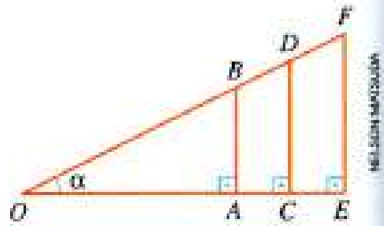
3 O valor do seno de um ângulo varia de acordo com as medidas dos lados do triângulo ou de acordo com a medida do ângulo? De acordo com a medida do ângulo.

Cosseno e tangente de um ângulo agudo

Considere novamente os triângulos retângulos *OAB*, *OCD* e *OEF*.

Como já vimos, os triângulos *OAB*, *OCD* e *OEF* são semelhantes.

De modo análogo ao que fizemos para a razão seno, dessa semelhança obtemos:



$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{OE}{OF} = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

A essa razão constante chamamos de **cosseno do ângulo α** e a indicamos por **cos α**.

Cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

Considerando qualquer um desses triângulos, temos:

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Da mesma semelhança, também obtemos:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

A essa razão constante chamamos de **tangente do ângulo α** e a indicamos por **tg α**.

Tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

Considerando qualquer dos triângulos da figura anterior, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

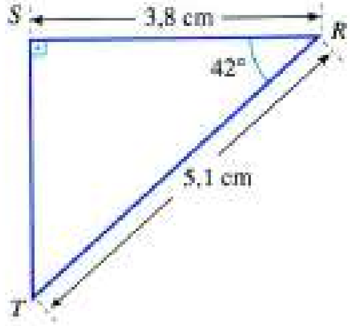
Veja alguns exemplos:

a) Vamos calcular o cosseno do ângulo interno $\hat{R}$, que mede 42°, do triângulo *RST* abaixo.

$$\cos 42° = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{R}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\cos 42° = \frac{3{,}8}{5{,}1}$$

$$\cos 42° \simeq 0{,}74$$



NELSON MATSUDA

b) Vamos calcular a tangente do ângulo interno $\hat{B}$ do triângulo *ABC* abaixo.
Inicialmente aplicamos o teorema de Pitágoras para calcular *AC*:

$$(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$$

$$(AC)^2 + \left(\sqrt{45}\right)^2 = 9^2$$

$$(AC)^2 + 45 = 81$$

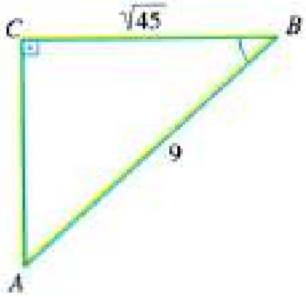
$$(AC)^2 = 36$$

$$AC = 6$$

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{B}}{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{B}}$$

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{6}{\sqrt{45}} = \frac{6\sqrt{45}}{45} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{5}}{45} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Portanto: $\text{tg } \hat{B} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$



NELSON MATSUDA

OBSERVAÇÕES

- O seno e o cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo são números reais positivos menores que 1.
- A tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é um número real positivo.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4 Construa, no caderno, um triângulo retângulo com um dos ângulos internos medindo 45°. Com uma régua, determine a medida aproximada, em centímetro, dos catetos e da hipotenusa.

a) Qual é o valor aproximado da razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo de 45° e a medida da hipotenusa desse triângulo? 0,7

b) Qual é o valor aproximado de cos 45°? 0,7

c) Qual é o valor da razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de 45° e a medida do cateto adjacente ao ângulo de 45°? 1

d) Qual é o valor de tg 45°? 1

5 Considere o triângulo retângulo, calcule usando uma calculadora e registre no caderno.

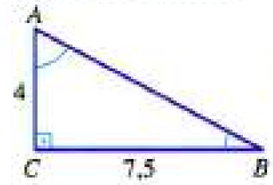
a) medida de $\overline{AB}$ 8,5

b) $\cos \hat{B}$ 0,88

c) $\text{tg}\ \hat{B}$ 0,53

d) $\cos \hat{A}$ 0,47

e) $\text{tg}\ \hat{A}$ 1,88



NELSON MATSUDA

6 Um brinquedo tem uma rampa de 64 cm de comprimento, através da qual se desloca um carrinho. A parte mais alta da rampa está a 12 cm da horizontal que passa pela parte mais baixa.

a) Faça a figura representando a situação. construção de figura

b) Calcule o seno do ângulo que a rampa forma com a horizontal. ≈ 0,19

7 Um retalho retangular de cartolina tem 15,6 cm de comprimento por 7,2 cm de largura. Traça-se uma das diagonais desse retângulo. Qual é a tangente do ângulo que a diagonal forma com o lado maior do retalho? ≈ 0,46

8 Justifique, em seu caderno, a afirmação: "O seno e o cosseno de um ângulo agudo são números reais positivos menores que 1".
São positivos porque representam razões entre medidas e são menores que 1 porque todo cateto é menor que a hipotenusa.

9 No triângulo retângulo MQR, determine em seu caderno:

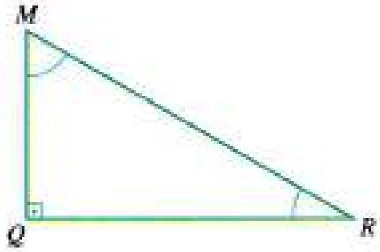
a) a medida aproximada dos lados (use uma régua); $MQ \approx 2{,}5$ cm, $MR \approx 5$ cm e $QR \approx 4{,}3$ cm

b) a medida dos ângulos agudos (use um transferidor); $m(\hat{M}) = 60°$ e $m(\hat{R}) = 30°$

c) $\text{sen}\ \hat{M}$; 0,86

d) $\cos \hat{M}$; 0,5

e) $\text{tg}\ \hat{M}$. 1,72



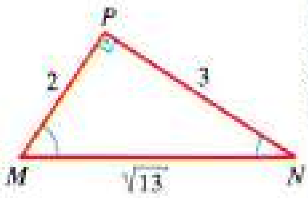
NELSON MATSUDA

10 Desenhe, em seu caderno, um triângulo retângulo ABC de modo que $m(\hat{B}) = 36°$. Determine, com duas casas decimais, o valor aproximado de:

a) $\text{sen}\ \hat{B}$ 0,59 b) $\cos \hat{B}$ 0,80 c) $\text{tg}\ \hat{B}$ 0,73

11 A tampa retangular de uma caixa de madeira tem 32 cm de comprimento por 24 cm de largura. Entre dois cantos diagonalmente opostos da tampa, prende-se um fio esticado. Qual é o cosseno do ângulo que o fio forma com o lado maior da tampa? 0,8

12 Considerando o triângulo MNP, determine, com duas casas decimais, o que se pede a seguir:



NELSON MATSUDA

a) $\text{sen}\ \hat{M}$ 0,83

b) $\cos \hat{N}$ 0,83

c) $\text{tg}\ \hat{M}$ 1,50

d) $\cos \hat{M}$ 0,55

e) $\text{tg}\ \hat{N}$ 0,66

f) $\text{sen}\ \hat{N}$ 0,55

13 Resolva a questão no caderno.

(ETE-SP) O acesso a um edifício é feito por uma escada de dois degraus, sendo que cada um tem 16 cm de altura. Para atender portadores de necessidades especiais, foi construída uma rampa.

Respeitando a legislação em vigor, a rampa deve formar, com o solo, um ângulo de 6°, conforme figura.

Dados
sen 6° = 0,10
cos 6° = 0,99

NELSON MATSUDA

A medida c do comprimento da rampa é, em metros, igual a alternativa e

a) 1,8.
b) 2,0.
c) 2,4.
d) 2,9.
e) 3,2.

14 Reúna-se com três colegas e façam o que se pede.

a) Cada um constrói um triângulo ABC, retângulo em A, e passa a um outro que medirá os seus lados e ângulos. respostas pessoais

b) Com base nas medidas obtidas no item **a**, calculem o valor das expressões:

- $\text{sen } \hat{B} - \cos \hat{C}$ 0
- $\dfrac{\text{sen } \hat{B}}{\cos \hat{B}} - \text{tg } \hat{B}$ 0
- $\text{sen } \hat{C} - \cos \hat{B}$ 0
- $\dfrac{\text{sen } \hat{C}}{\cos \hat{C}} - \text{tg } \hat{C}$ 0
- $\text{tg } \hat{B} \cdot \text{tg } \hat{C}$ 1

c) Comparem os valores obtidos para cada expressão do item **b** e respondam às questões:

- O que ocorre com o seno de um ângulo agudo e com o cosseno do seu complementar? São números iguais.
- O que ocorre com a tangente de um ângulo agudo e com a tangente de seu complementar? São números inversos.
- O que ocorre com a razão entre o seno e o cosseno de um ângulo agudo e com a tangente desse ângulo. São números iguais.

3. Como usar a tabela de razões trigonométricas

As razões trigonométricas são aplicadas na resolução de uma grande variedade de problemas. Para facilitar seu emprego, fornecemos uma tabela, na página seguinte, onde se encontram os valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos de 1° a 89°.

Atribui-se ao astrônomo grego Hiparco de Niceia (180-125 a.C.) o estabelecimento das bases da Trigonometria, e deve-se a ele a construção das primeiras tabelas trigonométricas.

Mais tarde, Cláudio Ptolomeu (85-165 a.C.), astrônomo, matemático e geógrafo grego, ampliou o trabalho de Hiparco com sua obra *Sintaxe matemática*, na qual apresenta um trabalho sobre Trigonometria.

Os árabes traduziram os treze livros que compunham a obra de Ptolomeu e deram a ela o nome de *Almagesto*, que em árabe significa "o maior".

Atualmente, muitas calculadoras fornecem os valores das razões trigonométricas.

Veja como calculamos o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de 45° usando uma calculadora como a da foto ao lado:

sen 45°: sin 4 5 = 0.707106781

cos 45°: cos 4 5 = 0.707106781

tg 45°: tan 4 5 = 1

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Geralmente as calculadoras científicas são importadas. Nessas calculadoras, a tecla sin *representa o seno, a tecla* cos *o cosseno e a tecla* tan *a tangente.*

TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000				

Veja exemplos de como aplicar a tabela de razões trigonométricas. Consideraremos, salvo menção em contrário, os valores aproximados da tabela como se fossem exatos.

a) Vamos procurar o sen 35° na tabela.
Na coluna Ângulo, procuramos 35°.
Na coluna Seno, encontramos 0,5736.
Portanto, sen 35° = 0,5736

Ângulo	Seno
35°	0,5736

b) Vamos descobrir a medida do ângulo cujo cosseno é 0,4695.
Na coluna Cosseno, procuramos o número 0,4695.
Na coluna Ângulo, encontramos 62°, que é a medida do ângulo cujo cosseno é 0,4695.

Ângulo	Seno	Cosseno
62°	0,8829	0,4695

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

15 Consulte a tabela de razões trigonométricas para encontrar o valor de:

a) sen 54° 0,8090
b) cos 36° 0,8090
c) tg 12° 0,2126
d) sen 56° 0,8290
e) cos 75° 0,2588

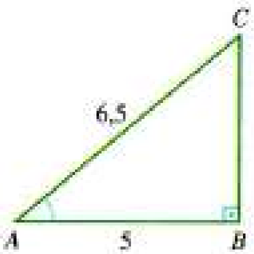
16 Consulte a tabela e, em seu caderno, determine x:

a) sen x = 0,4695 28°
b) cos x = 0,7771 39°
c) tg x = 0,2867 16°
d) sen x = 0,9135 66°
e) cos x = 0,1908 79°
f) tg x = 9,5144 84°

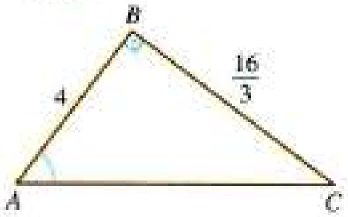
Pense mais um pouco...

1. Sem usar transferidor, determine, em seu caderno, a medida do ângulo $\hat{A}$ em cada caso.

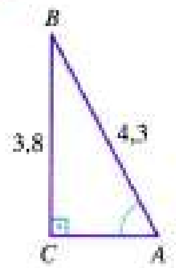
a) 40°



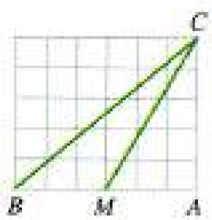
b) 53°



c) 62°



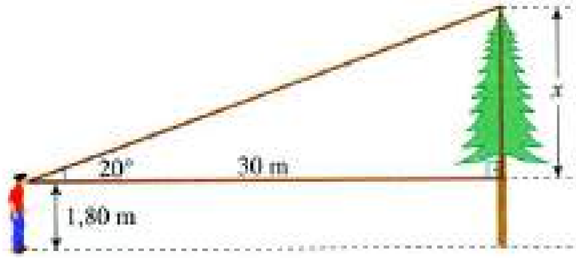
2. Determine, sem usar transferidor, a medida aproximada, em grau, dos ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{M}C$ e $B\hat{C}M$.
$m(A\hat{B}C) \approx 40°$
$m(B\hat{M}C) \approx 121°$
$m(B\hat{C}M) \approx 19°$



4. Resolução de problemas que envolvem triângulos retângulos

Usando valores das razões trigonométricas com duas casas decimais, vamos apresentar alguns exemplos desse tipo de problema.

a) Uma pessoa avista o ponto mais alto de uma árvore sob um ângulo de 20° em relação à horizontal, conforme a figura ao lado. Vamos calcular a altura dessa árvore.



No triângulo retângulo da figura, temos:

- medida do cateto adjacente ao ângulo de 20°: 30 m
- medida do cateto oposto ao ângulo de 20°: indicamos por x

Vamos usar tg 20° = 0,36.

$$\text{tg } 20° = \frac{x}{30}$$

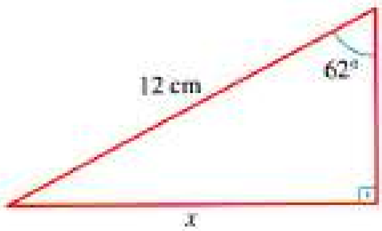
$$\frac{0{,}36}{1} = \frac{x}{30}$$

$$x = 10{,}8$$

altura da árvore $= x + 1{,}80 = 10{,}8 + 1{,}80 = 12{,}60$

Portanto, a altura dessa árvore é 12,60 m.

b) Vamos calcular a medida x nos triângulos retângulos a seguir.



Temos:

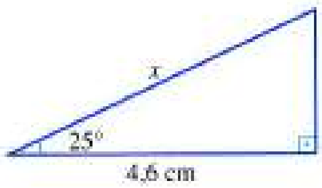
- medida da hipotenusa: 12 cm
- medida do cateto oposto ao ângulo de 62°: x

$$\text{sen } 62° = \frac{x}{12}$$

$$0{,}88 = \frac{x}{12}$$

$$x = 0{,}88 \cdot 12$$

$$x = 10{,}56 \text{ cm}$$



Temos:

- medida do cateto adjacente ao ângulo de 25°: 4,6 cm
- medida da hipotenusa: x

$$\cos 25° = \frac{4{,}6}{x}$$

$$0{,}90 = \frac{4{,}6}{x}$$

$$0{,}9x = 4{,}6$$

$$\frac{0{,}9x}{0{,}9} = \frac{4{,}6}{0{,}9}$$

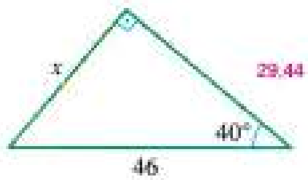
$$x \simeq 5{,}1 \text{ cm}$$

17 Usando valores das razões trigonométricas com duas casas decimais, calcule o valor aproximado de x em cada um dos triângulos retângulos:

a)

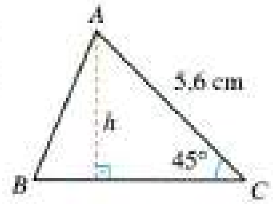
92,59

b)



29,44

18 Determine a medida aproximada da altura do triângulo. 3,92 cm



19 A base de um triângulo isósceles mede 16 cm, e o ângulo do vértice, 70°. Calcule a medida aproximada:

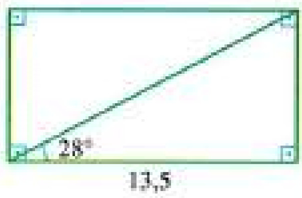
a) da altura relativa à base; 11,5 cm

b) de cada lado congruente desse triângulo isósceles. 14 cm

20 Observando a figura, determine no caderno:

a) a medida aproximada da largura do retângulo; 7,18

b) a área aproximada do retângulo. 96,66

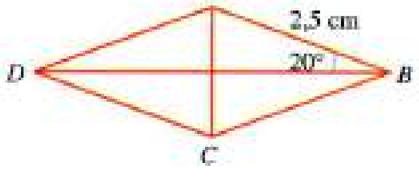


21 Para o losango $ABCD$ a seguir, determine:

4,7 cm a) a medida aproximada da diagonal maior;

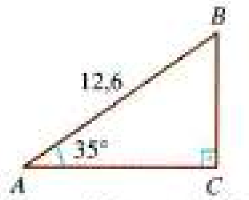
1,7 cm b) a medida aproximada da diagonal menor;

4 cm² c) a área aproximada do losango.



22 Um bombeiro é chamado para tirar um gato que se encontra em cima de uma árvore. O bombeiro apoia na árvore uma escada a 1,4 m do tronco, formando com o chão um ângulo de 68°. Calcule o comprimento aproximado dessa escada. 3,8 m

23 Considere o triângulo retângulo ao lado, e faça o que se pede no caderno.



a) Qual é a medida do ângulo $\hat{B}$? 55°

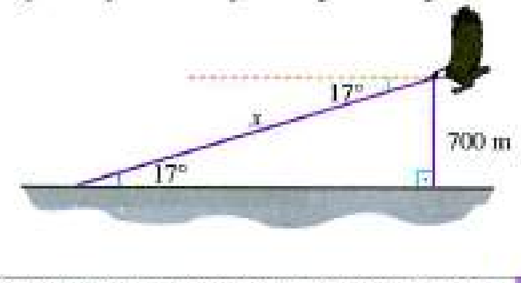
b) Calcule a medida aproximada do cateto $\overline{BC}$. 7,182

c) Determine a área aproximada desse triângulo sabendo que os lados são expressos em centímetro. aproximadamente 36,99 cm²

24 Um observador vê o ponto mais alto de uma torre sob um ângulo de 28°, conforme a figura a seguir. Calcule, em seu caderno, a altura aproximada dessa torre. 22,9 m

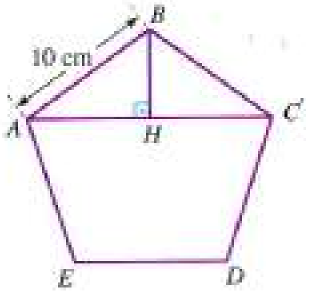
25 Observando o mapa a seguir, calcule quanto mede, aproximadamente, o trecho da avenida das Constelações entre a rua do Brilho e a rua das Estrelas. 100 m

26 Um gavião, a 700 m de altura, avista uma presa; faz uma descida de 17° em relação à horizontal e consegue capturá-la. Que distância o gavião percorreu para capturar a presa? 2.394 m



Pense mais um pouco...

Na figura, $ABCDE$ é um pentágono regular e H é o ponto médio da diagonal $\overline{AC}$.



NELSON MATSUDA

JOSÉ LUÍS JUHAS

Calcule, em seu caderno:

a) as medidas $m(A\hat{B}C)$ e $m(A\hat{B}H)$; 108°; 54°

b) as medidas aproximadamente de $\overline{AH}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$. 8,1 cm; 16,2 cm; 16,2 cm

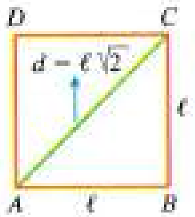
5. Razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°

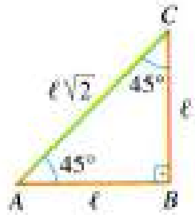
Vimos que os valores das razões seno, cosseno e tangente podem ser encontrados na tabela trigonométrica. Também podemos determinar esses valores com uma calculadora científica.

No entanto, as razões seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60° são facilmente calculadas, como veremos a seguir.

Razões trigonométricas do ângulo de 45°

Considere o quadrado $ABCD$, com lado de medida ℓ e diagonal $\overline{AC}$ medindo $d = \ell\sqrt{2}$.





ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

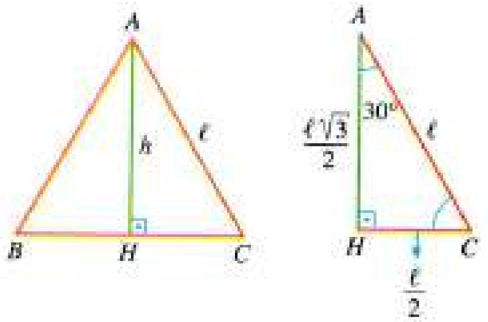
Destacando o triângulo ABC, temos:

$\text{sen}\,45° = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}}$	$\cos 45° = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}}$	$\text{tg}\,45° = \dfrac{\ell}{\ell}$
$\text{sen}\,45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\text{tg}\,45° = 1$
$\text{sen}\,45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	

Razões trigonométricas do ângulo de 30°

Considere agora o triângulo equilátero ABC, com lado de medida ℓ.

A altura $\overline{AH}$ do triângulo mede $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

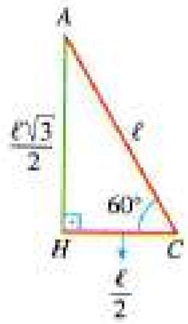
Destacando do $\triangle ABC$ o $\triangle AHC$, temos:

$\text{sen}\,30° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell}$	$\cos 30° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell}$	$\text{tg}\,30° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$
$\text{sen}\,30° = \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell}$	$\cos 30° = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell}$	$\text{tg}\,30° = \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{2}{\ell\sqrt{3}}$
$\text{sen}\,30° = \dfrac{1}{2}$	$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{tg}\,30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Razões trigonométricas do ângulo de 60°

Destacando novamente o $\triangle AHC$, da figura anterior, temos:

$\text{sen}\,60° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell}$	$\cos 60° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell}$	$\text{tg}\,60° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}}$
$\text{sen}\,60° = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell}$	$\cos 60° = \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell}$	$\text{tg}\,60° = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{\ell}$
$\text{sen}\,60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \dfrac{1}{2}$	$\text{tg}\,60° = \sqrt{3}$



NELSON MATSUDA

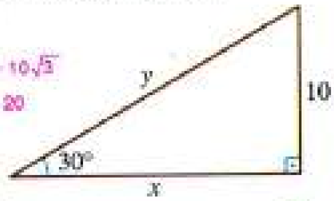
Vamos organizar em um quadro todos os valores encontrados:

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
30°	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

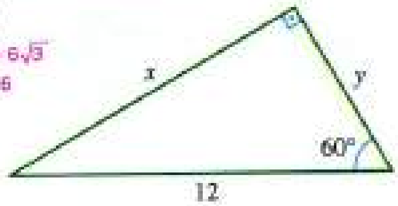
27 Usando as razões trigonométricas, calcule, em seu caderno, o valor de x e de y nos triângulos retângulos:

a)



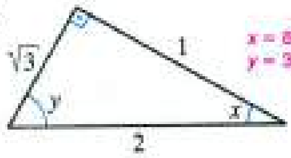
$x = 10\sqrt{3}$
$y = 20$

b)



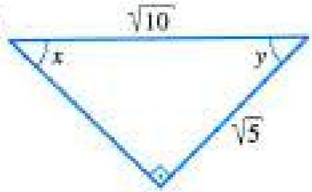
$x = 6\sqrt{3}$
$y = 6$

c)



$x = 60°$
$y = 30°$

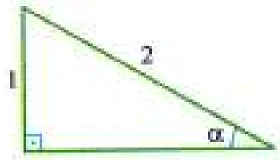
d)



$x = 45°$
$y = 45°$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

28 Resolva a questão no caderno.
(UFV-MG) O cosseno do ângulo α, assinalado na figura abaixo, é: alternativa d



NELSON MATSUDA

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **d)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **e)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

29 O lado não perpendicular às bases de um trapézio retângulo forma com a base maior um ângulo de 45°. Se as bases medem 12 cm e 9 cm, determine:

a) a medida da altura; 3 cm
b) a medida do lado não perpendicular às bases. $3\sqrt{2}$ cm

30 Construa, em seu caderno, um losango em que uma das diagonais meça 12 cm e forme com um dos lados um ângulo de 30°. Determine:

a) a medida da outra diagonal; $4\sqrt{3}$ cm
b) a medida do lado do losango. $4\sqrt{3}$ cm

31 Um poste projeta uma sombra de 5,6 m no momento em que os raios solares determinam um ângulo de 45° com a vertical. Qual é a altura desse poste? 5,6 m

32 Uma das alturas de um triângulo equilátero mede $2\sqrt{3}$ cm. Determine, no caderno, a medida do lado desse triângulo. 4 cm

33 Em um trapézio isósceles, os lados não paralelos formam com a base maior ângulos de 60°. Se as bases medem 28 cm e 20 cm, então:

a) qual é o perímetro do trapézio? 64 cm
b) qual é a área do trapézio? $96\sqrt{3}$ cm²

34 Resolva a questão no caderno.
(UCSal-BA) Na figura abaixo, tem-se um trapézio isósceles cujos lados têm as medidas indicadas.

NELSON MATSUDA

A medida do ângulo assinalado é: alternativa a

a) 60° **c)** 30° **e)** 15°
b) 45° **d)** 22°30′

35 Um paraquedista salta de um avião quando este se encontra a 1.500 m de altura. Devido à velocidade do avião e à ação do vento, o paraquedista cai conforme indica o segmento $\overline{PA}$, na figura abaixo, inclinado 30° em relação a $\overline{PB}$. A que distância do ponto B o paraquedista cai? $500\sqrt{3}$ m

NELSON MATSUDA

36 Uma arara está pousada no ponto mais alto de uma árvore de 19,5 m de altura. Ela é observada por um garoto de 1,50 m de altura, que se encontra afastado 18 m da árvore. Determine o ângulo, em relação à horizontal, sob o qual o garoto observa a arara. 45°

37 Responda à questão no caderno.

(Saresp) Um avião levanta voo sob um ângulo de 30° em relação ao solo.

Após percorrer 9 km em linha reta, sua altura h em relação ao solo será de: alternativa b

a) 1.530 m
b) 4.500 m
c) 7.200 m
d) 8.700 m

PARA SABER mais

O teodolito

O teodolito, um instrumento para medir ângulos, é usado, geralmente, por agrimensores e construtores para calcular grandes distâncias ou alturas inacessíveis. À primeira vista, o teodolito parece uma máquina fotográfica montada sobre um tripé. Para efetuar as medidas com o auxílio desse instrumento, o profissional utiliza-se do conceito de tangente de um ângulo agudo.

Arqueóloga medindo distância com teodolito na Ilha Kodiak, no Alasca.

Vamos ver como se constrói um teodolito?

Construção de um teodolito "caseiro"

Material:

- um pedaço de papelão grosso (o melhor é aquele ondulado em uma das faces) de aproximadamente 10 cm × 15 cm
- um pedaço de barbante de aproximadamente 20 cm
- um canudo plástico
- um peso de linha de pesca ou uma moeda ou uma argola de metal
- um desenho ou cópia xerográfica de um transferidor de 180°
- fita adesiva
- cola

Como construir:

Teodolito "caseiro".

- Com a fita adesiva, prenda o canudo em uma das bordas de 15 cm do papelão.

- Cole o desenho do transferidor logo abaixo do canudo.
- Amarre o peso numa extremidade do barbante.
- Com cuidado, faça um pequeno furo, transpassando o papelão bem no encontro da linha de fé do transferidor com a linha que marca 90°.
- Passe por esse furo a outra extremidade do barbante, deixando o restante no mesmo lado onde está o transferidor, e dê um nó bem firme.

Como efetuar a medição:

Agora, vamos experimentar o instrumento para cálculos de grandes alturas. Para isso, necessitamos de uma trena (ou de uma fita métrica ou de um metro de carpinteiro).

- Afaste-se de um poste de iluminação, meça sua distância até ele e anote (cateto adjacente).
- Olhe pelo orifício do canudo até enxergar o topo do poste. A altura do poste corresponderá ao cateto oposto.
- Segure o barbante com o peso na posição em que ele parou.
- Anote a medida do ângulo determinado pelo barbante (na posição horizontal, o ângulo marcado é de 90°).
- Procure, na tabela de razões trigonométricas, a tangente do seu ângulo de visão.
- Essa tangente será a razão entre a altura do poste, vista pelo observador, e a distância desse observador até o poste. Para saber a altura do poste, devemos acrescentar a altura do observador (do chão até seus olhos) à altura vista por ele.

Realize os cálculos e determine a altura do poste. Não se esqueça de somar a distância entre o chão e seus olhos à altura que você determinou.

Faça outras experiências semelhantes a essa e procure calcular distâncias a partir de algum objeto do qual você conheça a altura.

Agora é com você!

1. Paulo, treinando o uso de um teodolito "caseiro", observa uma torre. Calcule a altura da torre sabendo que o ângulo de visão de Paulo ao topo dela é de 45°, que ele está a 3,5 m dela e que seus olhos estão a 1,25 m do chão. 4,75 m

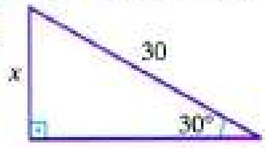
2. Paulo, ainda treinando o uso de seu teodolito, observou o topo de um poste de 7 m, sob um ângulo de visão de 15°. Qual é a distância aproximada de Paulo até o poste? 21,5 m

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

38 Construa um triângulo retângulo em que um dos ângulos meça 55°. Meça os lados desse triângulo, em milímetro. Calcule as razões trigonométricas desse ângulo, com uma casa decimal. Confira os resultados consultando a tabela ou uma calculadora. sen 55° = 0,8; cos 55° = 0,6; tg 55° = 1,4

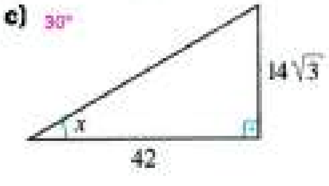
39 Nos triângulos retângulos seguintes, determine quanto vale x:

a) 15



b) 7,8

c) 30°



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

40 Resolva a questão no caderno.

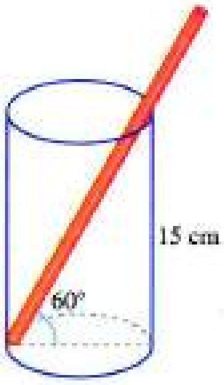
(Unopar-PR) Se um cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo medem a e $3a$, respectivamente, então o cosseno do ângulo oposto ao menor lado é: alternativa b

a) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ c) $\frac{1}{3}$ e) $2\sqrt{2}$

b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

41 A figura ao lado representa um copo de 15 cm de altura com um canudinho dentro. Calcule o comprimento aproximado desse canudinho sabendo que 8 cm dele está fora do copo. 25,3 cm

(*Dado*: $\sqrt{3} \approx 1{,}73$)

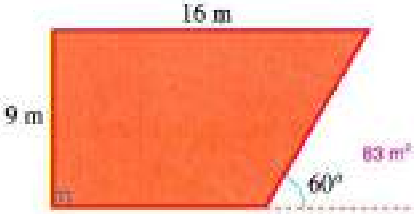


NELSON MATSUDA

42 Os ângulos da base de um triângulo isósceles medem 50°. Calcule a medida aproximada dos lados congruentes sabendo que a altura em relação à base mede 20 cm. 26,31 cm

43 Uma escada de 2,80 m de comprimento está apoiada no topo de um muro, formando com ele um ângulo de 60°. Qual é a altura do muro? 1,40 m

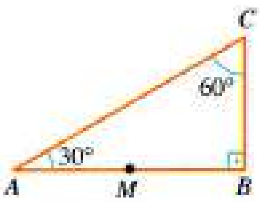
44 Regina possui um terreno na forma de um trapézio, conforme a figura abaixo. Quantos metros quadrados de muro, aproximadamente, serão necessários para cercar esse terreno se o muro tiver 1,80 m de altura?



83 m²

NELSON MATSUDA

45 (UCSal-BA) Na figura abaixo tem-se o triângulo ABC, cujos ângulos internos têm as medidas indicadas.



NELSON MATSUDA

Se M é ponto médio de $\overline{AB}$ e $AC = 10$ cm, qual é a medida do segmento $\overline{AM}$? $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

46 Rosana mediu a largura de um rio fixando um ponto A em uma das margens e um ponto B na margem oposta, de modo que $\overline{AB}$ ficasse perpendicular às margens do rio. Do ponto A, caminhou 40 m perpendicularmente a $\overline{AB}$ e marcou um ponto C. Mediu o ângulo $B\hat{C}A$, obtendo 30°. Assim, ela pôde determinar a largura do rio.

a) Determine essa largura, expressa na forma $a\sqrt{b}$. $\frac{40}{3}\sqrt{3}$ m

b) Determine o valor aproximado dessa largura. 23 m

47 Ana mora na esquina da rua Da Vinci com a rua Galileu. A sorveteria que ela frequenta fica a 280 m de sua casa, na esquina da rua Da Vinci com a rua Michelangelo. Num domingo, depois de tomar sorvete nessa sorveteria, Ana resolveu retornar por um caminho diferente, pela rua Michelangelo. Aproximadamente, em quantos metros aumentou sua caminhada? (Use $\sqrt{3} = 1{,}73$.)

102,2 m

NELSON MATSUDA

48 Resolva a questão no caderno.

(Vunesp) Duas rodovias retilíneas, A e B, cruzam-se formando um ângulo de 45°. Um posto de gasolina se encontra na rodovia A, a 4 km do cruzamento. Pelo posto passa uma rodovia retilínea C, perpendicular à rodovia B. A distância do posto de gasolina à rodovia B, indo através de C, em quilômetro, é: alternativa e

a) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $2\sqrt{2}$

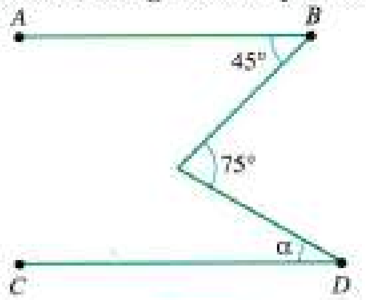
b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ d) $\sqrt{2}$

49 De uma folha de cartolina, foi recortado um triângulo isósceles cujo ângulo do vértice mede 120°. Cada um dos lados congruentes do triângulo mede 40 cm. Qual é a área do triângulo recortado? $400\sqrt{3}$ cm²

50 Uma escada rolante liga dois andares de uma loja. Sabendo que essa escada rolante tem 10 m de comprimento e inclinação de 30°, a medida de sua altura, em metro, é um número compreendido entre quais números pares consecutivos? entre 4 e 6

51 Resolva a questão no caderno.

(Mackenzie-SP) Na figura, $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$.



O valor de sen α é: alternativa c

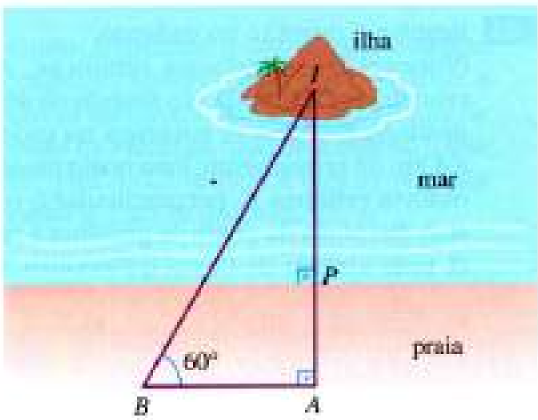
a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) 0

52 Dois prédios, *A* e *B*, estão situados num mesmo plano. Da base do prédio *A*, avista-se o topo do prédio *B* sob um ângulo de 45° com a horizontal, e da base do prédio *B* avista-se o topo do prédio *A* sob um ângulo de 60° com a horizontal. Se a distância entre *A* e *B*, medida em metro, é 34,6, determine:

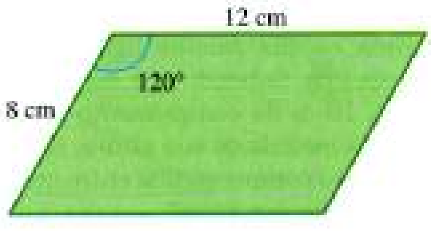
a) a altura do prédio *A*; 60 m

b) a altura do prédio *B*. 34,6 m

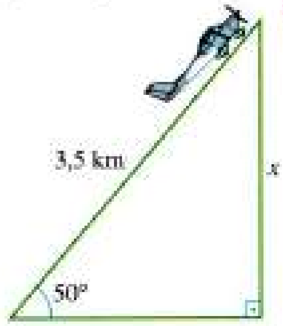
53 (PUC-Campinas-SP) Na praia, mediu-se a distância de *A* até *B* (750 m) e de *A* até *P* (620 m), além do ângulo $A\hat{B}I$ (60°). Qual é a distância da ilha até a praia? $10(75\sqrt{3} - 62)$ m



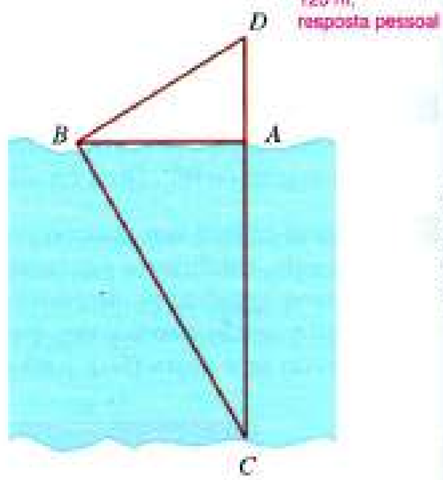
54 Um paralelogramo tem lados de medida 8 cm e 12 cm, e um de seus ângulos internos mede 120°. Calcule sua área. $48\sqrt{3}$



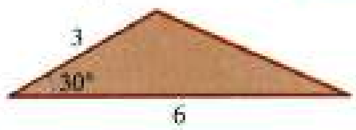
55 Um avião-caça levanta voo formando um ângulo de 50° em relação à pista. Calcule a altura a que o avião se encontrará do solo após percorrer 3,5 km. (*Dado*: sen 50° = 0,76) 2,66 km



56 (Unicamp-SP) Para medir a largura $\overline{AC}$ de um rio, um homem usou o seguinte procedimento: localizou um ponto *B* de onde podia ver na margem oposta o coqueiro *C*, de forma que o ângulo $A\hat{B}C$ fosse 60°; determinou o ponto *D* no prolongamento de $\overline{CA}$, de forma que o ângulo $C\hat{B}D$ fosse de 90°. Medindo *AD* = 40 m, achou a largura do rio. Determine essa largura e explique o raciocínio. 120 m; resposta pessoal



57 A área do triângulo abaixo é: alternativa b



a) 4 b) 4,5 c) 5 d) 5,5 e) 6

58 Um automóvel parte de *A* e segue, numa direção que forma com a reta $\overleftrightarrow{AC}$ um ângulo de 30°, com velocidade média de 50 km/h. Após 3 horas de percurso, a distância a que o automóvel se encontra da reta $\overleftrightarrow{AC}$ é de: alternativa a

a) 75 km

b) $75\sqrt{3}$ km

c) $50\sqrt{3}$ km

d) $75\sqrt{2}$ km

e) 50 km

CAPÍTULO

7 Estudo das funções

1. O conceito de função

A empresa de TV a cabo Cab cobra de seus assinantes uma mensalidade de R$ 95,00 e mais R$ 5,00 por programa extra comprado. Desse modo, o valor a ser pago (preço) no final de cada mês depende do número de programas comprados pelo assinante.


FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

Vamos organizar um quadro que mostre a relação entre o número de programas extras comprados e o total a ser pago.

Número de programas extras	Preço (em real)
0	95
1	$95 + 1 \cdot 5$
2	$95 + 2 \cdot 5$
3	$95 + 3 \cdot 5$
4	$95 + 4 \cdot 5$

Indicando por x o número de programas extras comprados e por y o preço a pagar, podemos relacionar essas duas grandezas pela sentença:

$$y = 95 + x \cdot 5 \text{ ou } y = 95 + 5x$$

Note que, a cada valor atribuído à letra x, obtemos **um único** valor para y, por exemplo:

- para $x = 0$, temos:

$$y = 95 + 5 \cdot 0 = 95 + 0 = 95$$

Isso significa que, quando não se compra programa extra, o preço é R$ 95,00.

- para $x = 1$, temos:

$$y = 95 + 5 \cdot 1 = 95 + 5 = 100$$

Ou seja, com a compra de 1 programa extra, o preço sobe para R$ 100,00.

- para $x = 2$, temos:

$$y = 95 + 5 \cdot 2 = 95 + 10 = 105$$

Ou seja, com a compra de 2 programas extras, o preço é R$ 105,00.

Nesse caso, podemos dizer que o preço (y) a pagar é obtido em **função** do número de programas extras comprados (x).

Dizemos que a grandeza y é **função** da grandeza x se há entre elas uma correspondência tal que, para cada valor de x, exista um único valor de y.

Na função que relaciona o número de programas extras comprados (x) e o preço a pagar (y), escrevemos a sentença $y = 95 + 5x$. Nesse caso, as letras x e y são chamadas de **variáveis** e a sentença $y = 95 + 5x$ é chamada de **lei da função**.

Em geral, indicamos que y é uma função de x por $y = f(x)$ (lemos: "y é igual a f de x"). Então, para o caso em que a lei da função é $y = 95 + 5x$, podemos escrever $f(x) = 95 + 5x$.

Acompanhe mais um exemplo:

Como Paulo é vendedor de assinaturas de revistas, seu salário sofre uma variação conforme o número de assinaturas vendidas em um mês. Paulo recebe um valor fixo de R$ 550,00, mais comissão de R$ 20,00 para cada assinatura vendida no mês. Acompanhe no quadro a relação entre o número de assinaturas vendidas e o salário de Paulo.

Número de assinaturas vendidas	Salário de Paulo (em real)
0	550
1	$550 + 1 \cdot 20 = 570$
2	$550 + 2 \cdot 20 = 590$
3	$550 + 3 \cdot 20 = 610$
4	$550 + 4 \cdot 20 = 630$
5	$550 + 5 \cdot 20 = 650$

VICENTE MENDONÇA

Para esse exemplo, podemos escrever a seguinte lei de função:

$$f(x) = 550 + x \cdot 20 \quad f(x) = 550 + 20x$$

Observe que $f(x)$ está associado ao salário de Paulo e x ao número de assinaturas vendidas.

Com essas informações, podemos responder, por exemplo, às seguintes questões:

a) Se Paulo vender 59 assinaturas em um mês, qual será seu salário?

Nesse caso, substituímos x por 59 na lei da função $f(x) = 550 + 20x$:

$$f(59) = 550 + 20 \cdot 59$$
$$f(59) = 550 + 1.180$$
$$f(59) = 1.730$$

Logo, se Paulo vender 59 assinaturas, ele receberá R$ 1.730,00 de salário.

Observe que $f(59)$ corresponde ao salário de Paulo quando x for igual a 59.

b) Se o salário ao final do mês foi de R$ 1.550,00, quantas assinaturas Paulo vendeu?

Agora, substituímos $f(x)$ por 1.550 e encontramos o valor de x correspondente.

$$1.550 = 550 + 20x$$
$$-20x = 550 - 1.550$$
$$20x = 1.000$$
$$x = 50$$

Portanto, se Paulo receber R$ 1.550,00 de salário, significa que foram vendidas 50 assinaturas.


VICENTE MENDONÇA

Outro exemplo:

Considere a função $f(x) = 5x + 10$ e calcule:

a) $f(12)$

$$f(12) = 5 \cdot 12 + 10$$
$$f(12) = 60 + 10 = 70$$

b) x para $f(x) = 46$

$$46 = 5x + 10$$
$$46 - 10 = 5x$$
$$36 = 5x$$
$$7,2 = x$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Responda oralmente às questões.

Em certa loja, uma camiseta custa R$ 40,00 a unidade, não importando a quantidade que se compre.

a) Na compra de 2 dessas camisetas, qual será o preço pago? R$ 80,00

b) Na compra de 10 dessas camisetas, qual será o preço pago? R$ 400,00

c) Para cada quantidade comprada dessas camisetas, o preço associado é único? sim

d) A relação entre a quantidade comprada de camisetas e o preço a ser pago é uma função? sim

e) Determine o preço pago, y, como uma função do número de camisetas compradas x. $y = 40x$

2 Em um estacionamento, são cobradas as seguintes tarifas:

- pela 1ª hora: R$ 5,00; resposta possível: $y = 5 + 2 \cdot (x - 1)$
- pela 2ª hora e seguintes: R$ 2,00 por hora.

Se x representa o número de horas que um carro permaneceu no estacionamento e y, o valor a ser pago, qual é a lei da função que fornece y em função de x?


HELEN KING/CORBIS-STOCK PHOTOS

3. a) Não, pois pode existir uma mãe que esteja associada a mais de um filho.

3 Responda em seu caderno.

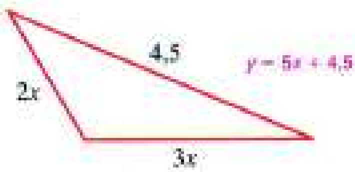
a) Considerando a relação que associa uma mãe a cada filho dela, podemos dizer que essa relação é uma função?

b) Considerando a relação que associa cada filho à mãe dele, podemos dizer que essa relação é uma função? Sim, pois qualquer filho tem uma única mãe.

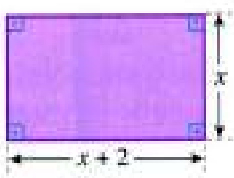
4 Faça o que se pede no caderno.

a) Represente o comprimento y em função de x, na figura a seguir. $y = x + 6$

b) Determine o perímetro y em função de x, nos polígonos a seguir.



$y = 5x + 4,5$



$y = 4x + 4$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

5 Uma máquina produz 8 litros de sorvete a cada 10 minutos. Então, a produção p depende da quantidade t de minutos em que a máquina está produzindo.

resposta possível: $p = \frac{8}{10} \cdot t$
Os alunos poderão expressar as leis de outras formas.

VICENTE MENDONÇA

Escreva, em seu caderno, a lei dessa função, que fornece p em função de t.

6 Considerando a função f cuja lei é $f(x) = 4x + 9$, determine em seu caderno:

a) $f(2)$ 17

b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 11

c) $f(-2)$ 1

d) $f(-0,3)$ 7,8

e) $f\left(\sqrt{2}\right)$ $4\sqrt{2} + 9$

7 Um losango tem a diagonal maior medindo 12 cm. Em seu caderno, faça o que se pede. resposta possível: $y = \frac{12 \cdot x}{2}$

a) Represente a área desse losango em função da medida da diagonal menor.

b) Calcule a área desse losango quando a diagonal menor tiver 7 cm. 42 cm²

c) Quanto deve medir a diagonal menor para que a área desse losango seja 45 cm²? 7,5 cm

8 Reúna-se com um colega e resolvam a atividade a seguir no caderno.

Certo fabricante de pirulitos tem uma despesa diária fixa de R$ 27,00 mais R$ 0,30 por pirulito produzido. Ele vende cada pirulito por R$ 1,20.

a) Represente o custo diário c em função da quantidade n de pirulitos produzidos. $c = 27 + 0,30\,n$

b) Se num dia ele vender 200 pirulitos, terá lucro ou prejuízo? De quanto? lucro; R$ 153,00

c) Qual é o número mínimo de pirulitos que esse fabricante deverá vender por dia para ter lucro? 31 pirulitos

d) Para esse fabricante ter um lucro de R$ 45,00, quantos pirulitos ele deve vender? 80 pirulitos

e) Expliquem a outra dupla como vocês pensaram para responder às questões. resposta pessoal

9 Calcule em seu caderno.

A produção de uma fábrica onde trabalham 121 funcionários é dada por $y = 50\sqrt{x}$, em que y representa a quantidade de unidades de certo produto fabricada mensalmente e x o número de funcionários dessa fábrica.

Calcule quantas unidades a mais serão produzidas, em um mês, com a contratação de 48 novos funcionários. 100 unidades

10 Faça um desenho, em seu caderno, representando um retângulo com 10 m de comprimento e a largura com x metros a menos.

a) Construa uma tabela colocando na primeira linha os valores 1, 2, 3, 4 e 5 para x e, na segunda linha, a área (A) do retângulo. construção de tabela

b) Pode-se atribuir a x um valor igual a 10 ou maior que 10? Justifique sua resposta.

c) Escreva uma dupla desigualdade, do tipo $a < x < b$, para indicar os valores reais que x pode assumir. $0 < x < 10$

b) Não, pois a largura seria nula ou negativa.

Pense mais um pouco...

Observe o mapa abaixo: Comentar com os alunos que, por convenção cartográfica, todos os mapas devem ter rosa-dos-ventos, que indica a orientação do mapa.

Elaborado a partir de *Atlas geográfico escolar – IBGE*. Rio de Janeiro: IBGE, 2002. p. 97.

Considerando a escala indicada no mapa, resolva as questões seguintes em seu caderno:

a) Escreva a lei da função que fornece a distância real y, em quilômetro, entre duas cidades do mapa em função da distância x, em centímetro, medida no mapa. $y = x \cdot 450$

b) Use uma régua para medir a distância entre São Paulo e Florianópolis em linha reta. Depois, descubra qual a distância real entre essas duas cidades. 485 km

PARA SABER mais

A Matemática na História

Não podemos precisar quando o conceito de **função** foi usado pela primeira vez. Sabe-se que os babilônios, em cerca de 2000 a.C., construíram tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, as quais podem ser consideradas tabelas de funções.

Antigos registros mesopotâmicos sobre lunações (espaços entre duas luas novas consecutivas) representavam, por meio de tabelas, a relação entre as fases da Lua e o período de tempo solar. Os babilônios valorizavam essas tabelas na medida em que elas estabeleciam uma correspondência de valores. Eles as utilizavam não somente para obter as informações que continham mas também para avaliar os resultados correspondentes a valores intermediários, o que faziam através de aproximações por segmentos de reta.

O uso dessas tabelas foi muito incentivado na Matemática, não só babilônica como na egípcia. Entretanto, a falta de abstração e de generalidade da Matemática nessas culturas impediria a elaboração do conceito de função como o conhecemos atualmente.

O emprego das aproximações na Antiguidade significa a aplicação de uma relação funcional elementar, pois é uma simples proporcionalidade e constituiu o primeiro passo rumo ao desenvolvimento posterior de noções mais gerais de função.

Novas contribuições, ainda implícitas, para o desenvolvimento do conceito de função surgiram muito depois, no final da Idade Média, por exemplo, as do matemático francês Nicole Oresme (1323-1382).

As ideias mais explícitas de função parecem ter surgido somente na época de René Descartes (1596-1650), matemático e filósofo francês que adotou equações em x e em y para introduzir uma relação de dependência entre quantidades variáveis, de modo que permitisse o cálculo de valores de uma delas por meio do valor da outra.

Foi somente a partir dos trabalhos do físico e matemático inglês Isaac Newton (1642-1727) e do matemático alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) que a palavra **função**, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida. Eles fizeram as primeiras contribuições efetivas para o desenvolvimento desse conceito.

Por volta de 1718, o matemático suíço Jean Bernoulli (1667-1748) chegou a considerar uma função como uma expressão qualquer, formada de uma variável e algumas constantes. Usou várias notações para uma função de x, sendo fx a mais próxima da que usamos hoje.

O suíço Leonhard Euler (1707-1783), um dos maiores matemáticos de sua época, também trabalhou com funções e introduziu a notação $f(x)$, hoje padronizada.

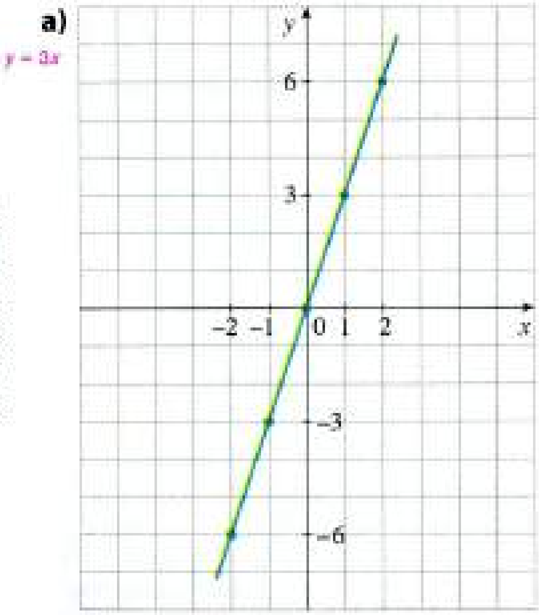
Posteriormente, outros matemáticos, como Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), Jean-Baptiste Fourier (1768-1830) e Johann Dirichlet (1805-1859), contribuíram significativamente para o desenvolvimento do conceito de função.

A teoria dos conjuntos, criada pelo matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), propiciou ampliar o conceito de função e chegar à definição conhecida atualmente.

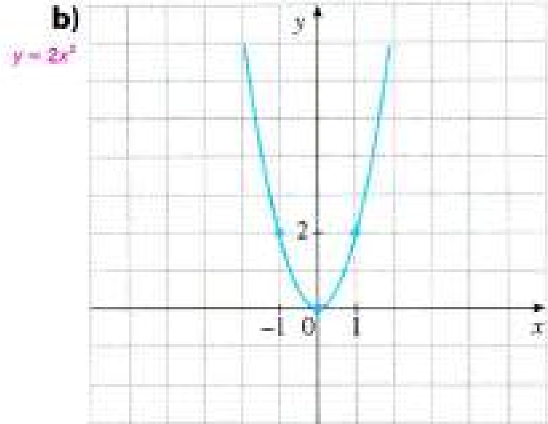
Gráfico de uma função

Observe os gráficos a seguir. Eles são exemplos de gráficos de funções.

a)

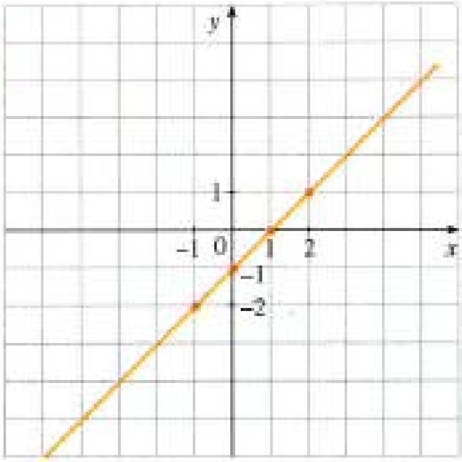


b)

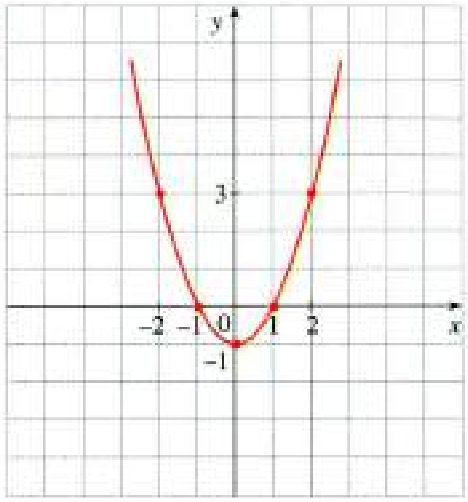


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

c) $y = x - 1$



d) $y = x^2 - 1$



Considere a função dada pela lei $y = x + 1$.

Vamos construir seu gráfico.

Para isso, atribuímos valores para x e calculamos os valores de y, determinando os pares ordenados correspondentes.

Organizamos esses dados no quadro ao lado.

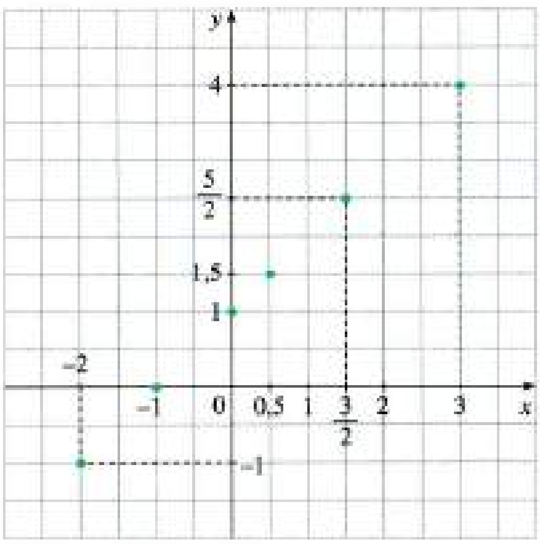
Para representar graficamente essa função, vamos marcar num plano cartesiano os pontos determinados por esses pares ordenados.

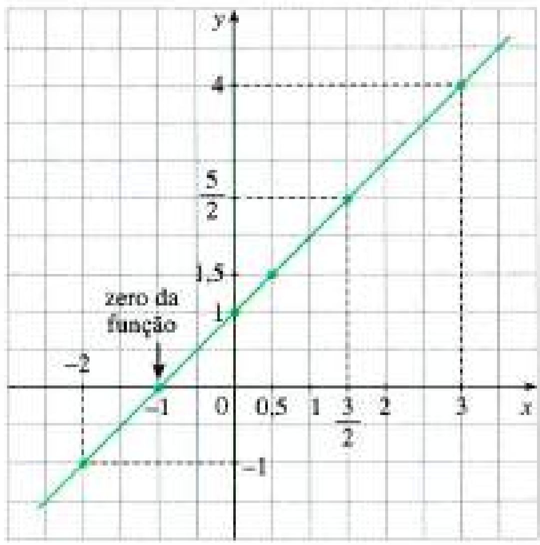
Quadro com alguns pontos do gráfico de $y = x + 1$

x	y	(x, y)
-2	$y = -2 + 1 = -1$	$(-2, -1)$
-1	$y = -1 + 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$y = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
$0{,}5$	$y = 0{,}5 + 1 = 1{,}5$	$(0{,}5; 1{,}5)$
$\frac{3}{2}$	$y = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$
3	$y = 3 + 1 = 4$	$(3, 4)$

Os pontos marcados são apenas alguns dos pontos do gráfico dessa função, pois existem infinitos pares ordenados que satisfazem a lei: $y = x + 1$

O gráfico dessa função é a reta que passa por esses pontos.





Desse modo, no nosso exemplo, para calcular o zero da função, basta resolver a equação $x + 1 = 0$. Assim, teremos: $x = -1$

Observe que a abscissa do ponto que tem $y = 0$ é $x = -1$. Esse valor de x é chamado de **zero da função**.

Zero de uma função é todo valor de x para o qual y é igual a zero, ou seja, é a abscissa do ponto em que o gráfico da função cruza o eixo dos x.

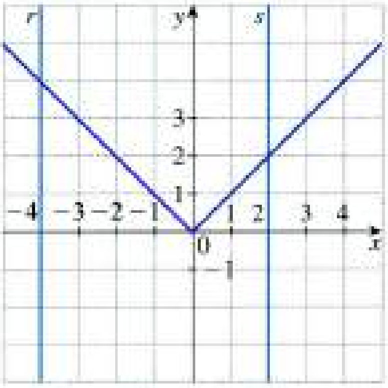
Como reconhecer o gráfico de uma função

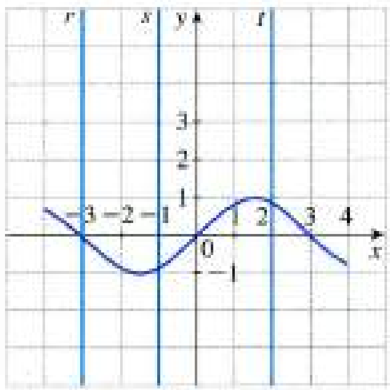
Você já viu que quando y é função de x, para cada valor de x, existe um único valor de y.

Desse modo, em um gráfico de função, para uma abscissa dada haverá somente um ponto correspondente no gráfico.

Podemos verificar isso geometricamente, traçando retas perpendiculares ao eixo dos x. Se existir uma dessas retas que intercepte o gráfico em mais de um ponto, o gráfico não representa uma função.

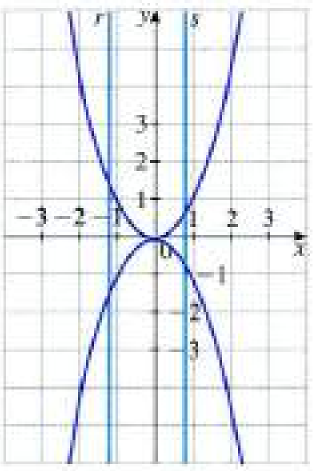
Veja os exemplos:

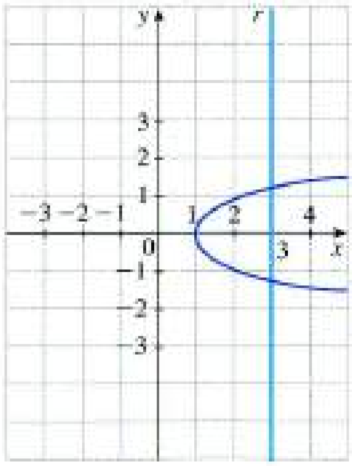




ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Cada um destes gráficos representam uma função, pois, para qualquer valor de x, temos um único valor de y correspondente. Nesses casos, qualquer reta perpendicular ao eixo dos x interceptará os gráficos em um só ponto.





ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Estes gráficos não representam uma função, pois existe x com dois valores de y correspondentes. Observe, em cada caso, que a reta r, perpendicular ao eixo dos x, intercepta os gráficos em dois pontos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

11 Considere a função dada pela lei $y = -x + 1$. Construa em uma folha de papel quadriculado o gráfico dessa função, sendo x um número real qualquer. construção de gráfico

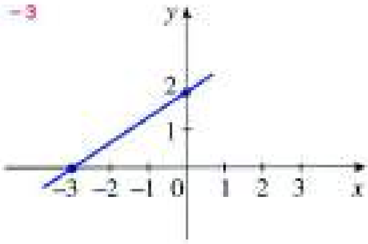
12 Um automóvel percorre uma estrada à velocidade constante de 80 km por hora.

a) Indicando por x o tempo transcorrido (em hora) e por y a distância percorrida (em quilômetro), monte em seu caderno uma tabela com os seguintes valores para x: 0, 1, 2, 3, 4 e 5. A seguir, escreva a lei da função que fornece y em relação a x. $y = 80x$

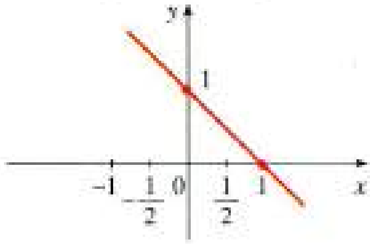
b) Represente, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico correspondente. construção de gráfico

13 Determine, no caderno, o zero das funções representadas nos gráficos a seguir.

a) -3



b) 1

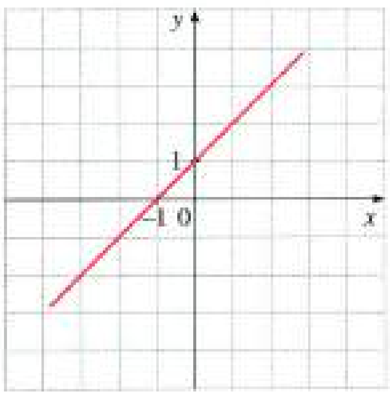


14 Em seu caderno, determine o zero das funções dadas por:

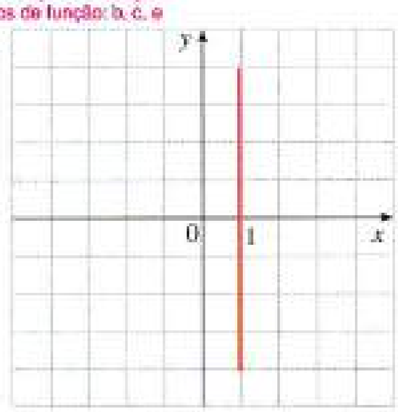
a) $y = x + 3$ -3 **b)** $y = -3x^2 + 6$ $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ **c)** $y = 3x + 18$ -6

15 Observe as representações gráficas a seguir e identifique em seu caderno os gráficos que representam funções. Justifique sua resposta. São gráficos de função: a, d, f, g, h
Não são gráficos de função: b, c, e

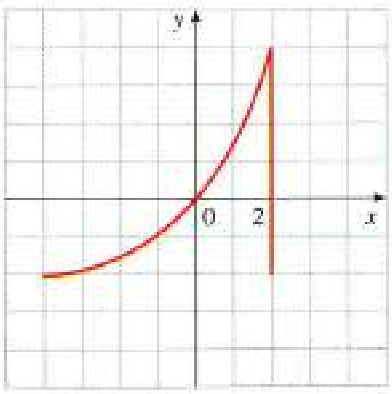
a)



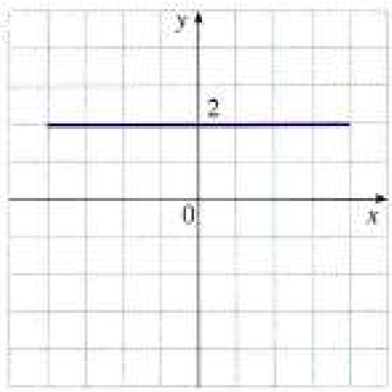
c)



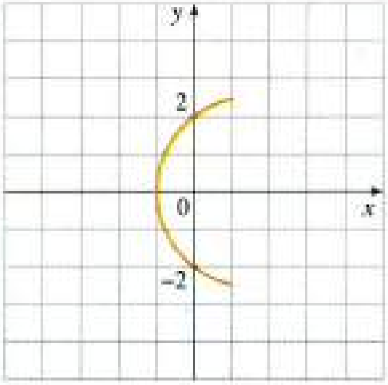
b)



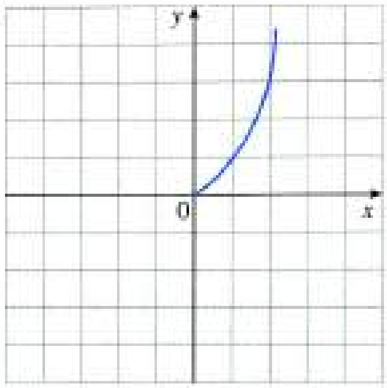
d)



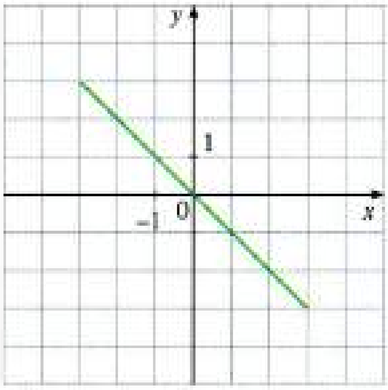
e)



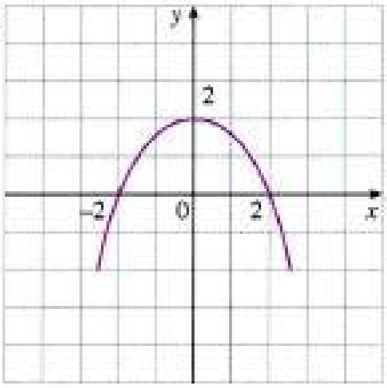
g)



f)



h)



Pense mais um pouco...

O preço de uma revista é 6 reais. No caderno, faça o que se pede.

a) Faça uma tabela que apresente o preço de 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 exemplares dessa revista. construção de tabela

b) Represente num plano cartesiano os pontos da tabela, colocando no eixo dos x o número de revistas e no eixo dos y, o preço a pagar. construção do gráfico

c) É possível comprar 4,5 revistas? E $\sqrt{3}$ revistas? Justifique sua resposta. resposta pessoal

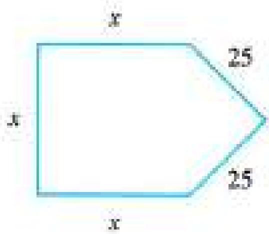
d) Você pode traçar uma reta por esses pontos para representar o gráfico? Por quê?
Não. Porque a quantidade de revista é uma grandeza discreta, ela é representada pelos números naturais e não pelos reais.

2. Função polinomial do 1º grau

Considere o exemplo a seguir.

No pentágono ao lado, as medidas são dadas em centímetro. O perímetro desse polígono depende dos valores que forem atribuídos a x. Indicando o perímetro por y, temos:

$$y = 3x + 50$$



A função definida pela lei $y = 3x + 50$ é um exemplo de **função polinomial do 1º grau**.

Uma função polinomial do 1º grau é toda função do tipo $y = ax + b$, com a e b sendo números reais e $a \neq 0$, e é definida para todo x real.

Nos exemplos de função polinomial do 1º grau a seguir, destacamos os valores de a e b:

a) $y = 2x - 1$, sendo $a = 2$ e $b = -1$

b) $y = -\frac{3}{2}x + 5$, sendo $a = -\frac{3}{2}$ e $b = 5$

c) $y = -5x$, sendo $a = -5$ e $b = 0$

d) $y = \frac{x}{2}$, sendo $a = \frac{1}{2}$ e $b = 0$

VICENTE MENDONÇA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16 Identifique, em seu caderno, as leis que representam funções do 1º grau. a, b, d, f

a) $y = x + 3$
b) $y = -5x + 1$
c) $y = x^2 - 3x$
d) $y = -4x$
e) $y = x^3 - 5x + 6$
f) $y = 2 - x$

17 Dados a e b, escreva, no caderno, a lei de cada função do 1º grau.

a) $a = 2$ e $b = -1$ $y = 2x - 1$
b) $a = \frac{1}{2}$ e $b = 0$ $y = \frac{x}{2}$
c) $a = \sqrt{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$ $y = \sqrt{2}x - \frac{1}{2}$
d) $a = -\frac{1}{3}$ e $b = -\frac{1}{3}$ $y = -\frac{x}{3} - \frac{1}{3}$

18 Dada a função definida pela lei $f(x) = 5x - 4$, determine em seu caderno:

a) $f(-1)$; -9
b) $f\left(-\frac{3}{5}\right)$; -7
c) o valor de x para que se tenha $f(x) = 6$; 2
d) o valor de x para que se tenha $f(x) = 0$. $\frac{4}{5}$

19 Considere o retângulo abaixo e determine no caderno:

a) o perímetro dele em função de x; $y = 2x + 70$
b) o perímetro para $x = 12,5$; 95
c) o valor de x para que se tenha $f(x) = 90$. 10

NELSON MATSUDA

20 Considerando o quadrado com medida de lado igual a x cm, determine no caderno:

a) o perímetro do quadrado em função de x; $p = 4x$
b) o perímetro para $x = 10$ cm. 40 cm

21 A lei que fornece a temperatura T, em grau Celsius, de ebulição da água de acordo com a altitude h, em metro, é:
$T = 100 - 0,001h$

VICENTE MENDONÇA

a) Qual é a temperatura de ebulição da água a 2.400 m de altitude? 97,6 °C
b) Qual é a temperatura de ebulição da água ao nível do mar? 100 °C

22 Uma caixa-d'água de 1.000 ℓ de capacidade é alimentada por uma torneira que, totalmente aberta, despeja 25 ℓ de água a cada 3 minutos.

a) Considerando que a caixa-d'água esteja totalmente vazia, em quanto tempo ela ficará totalmente cheia depois que a torneira for aberta? 120 minutos ou 2 horas
b) Se a torneira permanecer aberta por 15 minutos, quantos litros de água ela terá despejado na caixa durante esse tempo? 125 litros
c) Faça uma tabela indicando o volume de água que haverá na caixa de 15 em 15 minutos até ela ficar cheia. construção de tabela
d) Qual é a lei da função que representa o volume de água v em função do tempo t da torneira totalmente aberta? $v = 25 \cdot \frac{t}{3}$
e) Essa função é do 1º grau? sim

Gráfico de uma função polinomial do 1º grau

Quando representamos graficamente uma função polinomial do 1º grau o gráfico obtido é sempre uma reta.

Veja os exemplos:

a) Representaremos graficamente a função do 1º grau definida por $y = 2x + 1$.

Quadro com alguns pontos do gráfico de $y = 2x + 1$

x	y	(x, y)
-1	-1	$(-1, -1)$
0	1	$(0, 1)$
1	3	$(1, 3)$

Indicação dos pontos encontrados no quadro

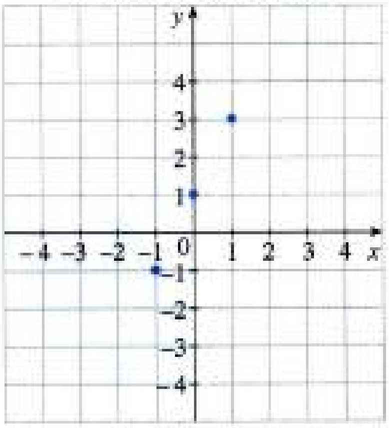
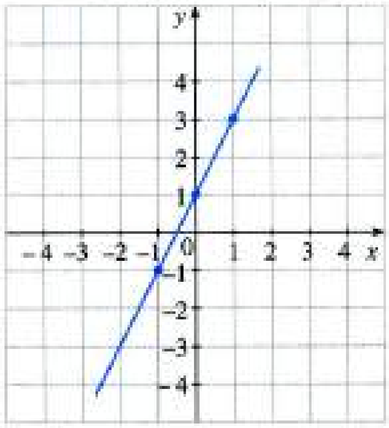


Gráfico da função



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

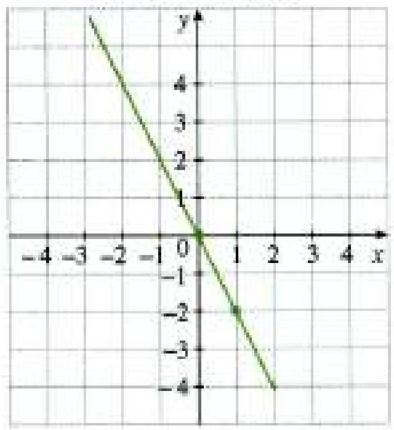
Como uma reta pode ser determinada por dois pontos distintos, então para construir o gráfico de uma função do 1º grau é suficiente representar apenas dois pontos no plano cartesiano e traçar a reta que passa por esses pontos.

b) Faremos a representação gráfica da função do 1º grau definida por $y = -2x$.

Quadro com dois pontos do gráfico de $y = -2x$

x	y	(x, y)
0	0	$(0, 0)$
1	-2	$(1, -2)$

Gráfico da função



NELSON MATSUDA

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau do tipo $y = ax$ é sempre uma reta que passa pela origem do plano cartesiano.

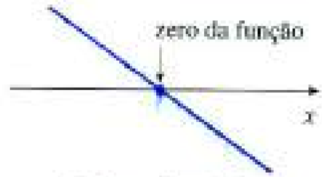
A função de 1º grau definida por $y = -2x$ é um exemplo de função com essa característica.

Conforme observamos nos dois gráficos construídos nos exemplos anteriores, a reta pode ter inclinações diferentes.

- Se $a > 0$, a inclinação da reta é:

Esboço do gráfico

- Se $a < 0$, a inclinação da reta é:



Esboço do gráfico

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Conhecido o zero de uma função do 1º grau e identificada a inclinação que a reta pode ter, podemos esboçar o gráfico dessa função.

Vamos determinar o zero e esboçar o gráfico das funções dadas por:

a) $y = 5x - 4$

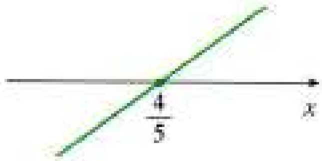
Zero da função:

$5x - 4 = 0$

$5x = 4$

$x = \dfrac{4}{5}$

Como $a = 5$ e, portanto, $a > 0$, o gráfico tem o seguinte esboço:



b) $y = -6x - 2$

Zero da função:

$-6x - 2 = 0$

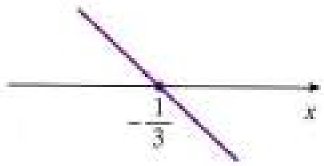
$-6x = 2$

$6x = -2$

$x = -\dfrac{2}{6}$

$x = -\dfrac{1}{3}$

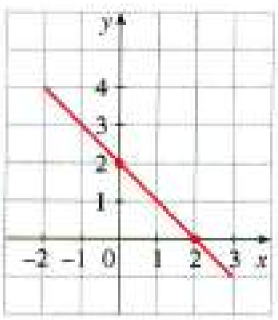
Como $a = -6$ e, portanto, $a < 0$, o gráfico tem o seguinte esboço:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

23 Observe o gráfico de uma função para responder às questões em seu caderno.



NELSON MATSUDA

a) Qual é o valor de y quando $x = 2$? 0

b) Para que valor de x temos $y = 4$? −2

24 Construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico das funções do 1º grau dadas por: construção de gráfico

a) $y = -x + 3$

b) $y = 3x$

c) $y = -2x$

d) $y = 3x - 2$

25 O par ordenado (2, 8) representa um ponto do gráfico de uma função do tipo $y = ax$. 4

a) Determine o valor de a da lei dessa função.

b) Determine o valor de y para $x = 3{,}5$. 14

c) Encontre o valor de x para que se tenha $y = 0$. 0

d) Represente graficamente essa função em uma folha de papel quadriculado. construção de gráfico

26 Considere a função $y = x - 3$.

a) Represente graficamente essa função em uma folha de papel quadriculado. construção de gráfico

b) Qual é a abscissa do ponto em que a reta corta o eixo dos x? 3

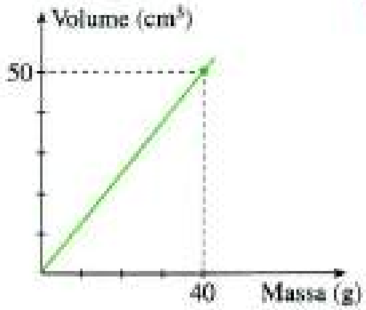
c) Qual é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo dos y? -3

27 O gráfico ao lado mostra a variação do volume de álcool em função de sua massa.

Determine em seu caderno.

a) a lei da função; $y = 1{,}25x$

b) a massa (em grama) de 30 cm³ de álcool. 24 gramas



Pense mais um pouco...

Usando uma folha de papel quadriculado, represente graficamente, em um mesmo plano cartesiano, as funções dadas pelas leis:

$$f(x) = 3x + 1 \text{ e } g(x) = -2x + 6$$

Responda em seu caderno.

a) Para que valor de x temos $f(x) = 0$? $-\frac{1}{3}$

b) Qual é a abscissa do ponto em que o gráfico da função $g(x)$ corta o eixo dos x? 3

c) Qual é a ordenada do ponto em que o gráfico da função $f(x)$ corta o eixo dos y? 1

d) Para que valor de x temos $f(x) = g(x)$? 1

Estudo do sinal de uma função polinomial do 1º grau

Estudar o sinal de uma função é determinar os valores reais de x para que:

- a função se anule ($y = 0$);
- a função seja positiva ($y > 0$);
- a função seja negativa ($y < 0$).

Vamos ver dois exemplos do estudo do sinal de funções do 1º grau.

a) Estudar o sinal da função dada por: $y = 2x - 4$

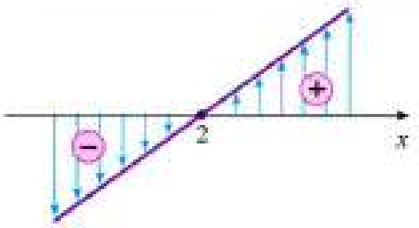
Podemos fazer esse estudo por meio do esboço do gráfico da função. Para isso, temos de calcular o valor de x que anula essa função.

Para $y = 0$, temos:

$$2x - 4 = 0, \text{ ou seja, } x = 2.$$

Logo, essa função se anula para: $x = 2$

Observando ainda que na lei dessa função, $y = 2x - 4$, $a = 2$, portanto $a > 0$, temos condições de esboçar o gráfico e fazer o estudo do sinal.



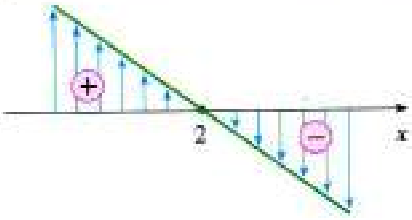
- Para $x = 2$, temos: $y = 0$
- Para $x > 2$, temos: $y > 0$
- Para $x < 2$, temos: $y < 0$

b) Estudar o sinal da função dada por: $y = -2x + 4$

Inicialmente, vamos calcular o valor de x que anula essa função.

Para $y = 0$, temos: $-2x + 4 = 0$, ou seja, $x = 2$. Logo, essa função se anula para: $x = 2$

Observando ainda que em $y = -2x + 4$, $a = -2$, portanto $a < 0$, podemos esboçar o gráfico e fazer o estudo do sinal.



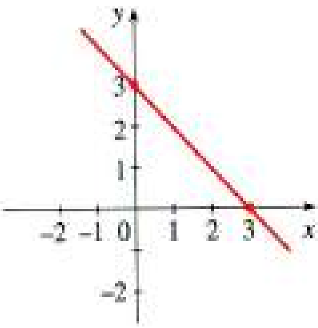
NELSON MATSUDA

- Para $x = 2$, temos: $y = 0$
- Para $x > 2$, temos: $y < 0$
- Para $x < 2$, temos: $y > 0$

29. a) $x = 4$; $y = 0$; $x > 4$; $y > 0$; $x < 4$; $y < 0$
b) $x = 2$; $y = 0$; $x > 2$; $y < 0$; $x < 2$; $y > 0$
c) $x = \frac{5}{2}$; $y = 0$; $x > \frac{5}{2}$; $y > 0$; $x < \frac{5}{2}$; $y < 0$
d) $x = -\frac{1}{2}$; $y = 0$; $x > -\frac{2}{2}$; $y < 0$; $x < -\frac{1}{2}$; $y > 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

28 Considere o gráfico abaixo de uma função do 1º grau e responda às questões no caderno.



NELSON MATSUDA

a) Para que valor de x temos $y = 0$? 3

b) Para que valores de x temos $y > 0$? $x < 3$

c) Para que valores de x temos $y < 0$? $x > 3$

29 Em seu caderno, estude o sinal das seguintes funções do 1º grau.

a) $y = 2x - 8$ **c)** $y = 2x - 5$

b) $y = -3x + 6$ **d)** $y = -2x - 1$

30 Considere a função do 1º grau definida por $y = ax + b$. Sabe-se que $a > 0$ e que o ponto determinado pelo par $(5, 0)$ pertence ao gráfico dessa função. Em seu caderno, determine o sinal de y quando:

a) $x = -2$ negativo **c)** $x = 3$ negativo **e)** $x = 10$ positivo

b) $x = 0$ negativo **d)** $x = 8$ positivo

31 Crie uma função do 1º grau de modo que:

- o zero dessa função seja 2;
- o gráfico para $x > 2$ esteja acima do eixo das abscissas, ou seja, $y > 0$.

Quantas funções assim existem? infinitas

possíveis respostas: $y = x - 2$, $y = +\frac{x}{2} - 1$; $y = 2x - 4$

PARA SABER mais

Trabalhando com juro

Quando tomamos emprestado dinheiro de um banco, pagamos uma espécie de aluguel por ele. Esse "aluguel" é chamado de **juro** (j).

Outras situações em que se cobram juro são as compras a prazo. Do mesmo modo, recebemos juro quando fazemos uma aplicação financeira de nosso dinheiro.


VICENTE MENDONÇA

O que pagamos ou recebemos de juro é uma porcentagem sobre o dinheiro emprestado ou aplicado durante determinado tempo (t). Essa porcentagem é chamada de **taxa de juro** (i).

A quantia que se empresta é chamada de **capital** (C). A soma do capital empregado com o juro obtido denomina-se **montante** (M).

Quando um capital é aplicado por certo tempo a determinada taxa de juro, o montante pode crescer segundo dois regimes de capitalização (processo de formação do juro): o **juro simples** ou o **juro composto**.

Dada uma aplicação de R$ 500,00 a juro de 10% ao mês, durante 3 meses, considere as situações a seguir.

Situação 1

O juro é calculado sempre sobre os R$ 500,00.

A cada mês, o juro é dado por:

$$10\% \text{ de } 500 = \frac{10}{100} \cdot 500 = 50$$

Ao final dos 3 meses, o capital de R$ 500,00 produziu R$ 150,00 de juro.

O juro assim calculado é chamado de **juro simples**.

Situação 2

A cada mês o juro é acrescentado ao capital, e o total passará a render juro no próximo mês.

Assim, ao final do 1º mês, o capital de R$ 500,00 produz R$ 50,00 de juro.

Somando o capital com o juro, temos, agora, um novo capital, que é o montante.

montante = R$ 500,00 + R$ 50,00 =
= R$ 550,00

Ao final do 2º mês, esse montante produz R$ 55,00 de juro. Veja:

$$10\% \text{ de } 550 = \frac{10}{100} \cdot 550 = 55$$

Somando R$ 550,00 com R$ 55,00, obtemos o novo montante de R$ 605,00.

Ao final do 3º mês, esse montante produz juro de R$ 60,50 (10% de 605).

Somando o juro obtido em cada mês, temos:

R$ 50,00 + R$ 55,00 + R$ 60,50 = R$ 165,50

Logo, ao final dos 3 meses, o capital inicial de R$ 500,00 produziu R$ 165,50 de juro.

O juro assim calculado é chamado de **juro composto**.

Vejamos como obter uma fórmula para o cálculo de juro simples.

Sendo C o capital, i a taxa (expressa na forma decimal), t o período de tempo (na mesma unidade da taxa) e j o juro, temos:

Período (t)	Juro (j)
primeiro	$C \cdot i$
segundo	$C \cdot i + C \cdot i$
terceiro	$C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i$
...	...
t-ésimo	$\underbrace{C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i + \dots + C \cdot i}_{t \text{ parcelas}}$

Assim, o cálculo do juro simples pode ser feito do seguinte modo:

$$\boxed{j = C \cdot i \cdot t}$$

Observe que, fixados o capital e a taxa, temos o juro em **função** do tempo. Essa função é do 1º grau, pois é do tipo $y = ax + b$, com $b = 0$.

Vamos considerar que um capital de R$ 20,00 seja aplicado a uma taxa de 2,5% ao mês, no regime de juro simples.

Assim, temos: C = R$ 20,00 e $i = 2{,}5\% = 0{,}025$

Podemos expressar o juro em função do tempo por:

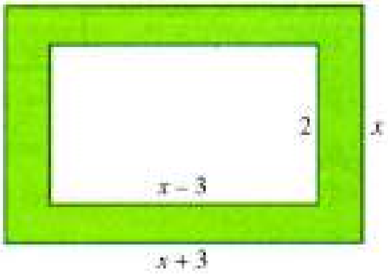
$j = C \cdot i \cdot t$, ou seja, $j = 20 \cdot 0{,}025 \cdot t$, ou ainda, $\boldsymbol{j = 0{,}5t}$

Agora é com você!

1. Um capital de R$ 18.000,00 é aplicado à taxa de 8% ao ano no regime de juro simples. Em seu caderno, determine o juro obtido para uma aplicação de 2 anos. j = R$ 2.880,00
2. Responda no caderno: por quanto tempo o capital de R$ 12.000,00 esteve empregado à taxa de juro simples de 1,6% ao mês para render R$ 2.304,00 de juro? 12 meses (ou 1 ano)
3. Adriano aplicou R$ 10.000,00 em um regime de juro composto com taxa de 0,8% ao mês. Calcule, em seu caderno, o montante após 4 meses de aplicação. R$ 10.323,86

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

32 Considerando a figura abaixo, expresse, no caderno, a área y da região pintada de verde em função de x. $y = x^2 + x + 6$



33 Considerando a função dada pela lei $f(x) = \dfrac{3x}{5} - \dfrac{7}{4}$, calcule em seu caderno: $\dfrac{f(15) - f(10)}{15 - 10}$ $\dfrac{3}{5}$

34 Uma função é dada pela lei $f(x) = 10x + 10$. No caderno, calcule $f(10) - f(0)$. 100

35 Na cidade onde Carlos mora, os táxis cobram uma quantia fixa de R\$ 3,80 e mais R\$ 0,70 por quilômetro rodado. Júlia, a tia de Carlos, mora em outra cidade. Nessa cidade, os táxis cobram uma quantia fixa de R\$ 4,30 e mais R\$ 0,60 por quilômetro rodado.

a) Expresse o preço y a ser pago em função dos x quilômetros rodados num táxi da cidade onde Carlos mora. $y = 3{,}80 + 0{,}70x$

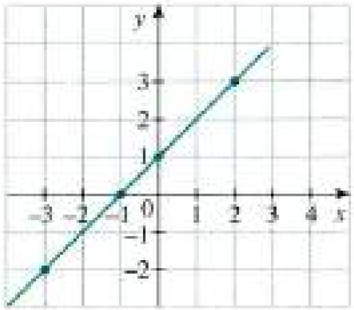
b) Faça o mesmo para um táxi na cidade onde Júlia mora. $y = 4{,}30 + 0{,}60x$

c) Quanto se pagará por uma corrida de 10 km em um táxi da cidade de Carlos? R\$ 10,80

d) Qual dos dois táxis é mais econômico para uma corrida de 20 km? o táxi da cidade de Júlia

e) Para certo número de quilômetros rodados, os táxis das duas cidades cobram a mesma quantia. Qual é esse número? 5 km

36 Observe este gráfico da função f do 1º grau:



Agora, determine em seu caderno:

a) $f(-3)$ −2

b) $f(0)$ 1

c) o valor de x para $y = 3$ 2

d) o zero da função −1

e) o gráfico passa pelo ponto (10, 11)? sim

37 Considere a função do 1º grau dada pela lei $y = 7x - 4$.

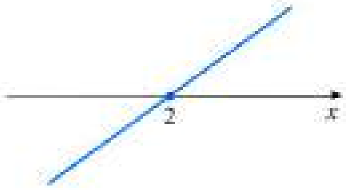
a) Determine o zero da função. $\frac{4}{7}$

b) Construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico dessa função. construção de gráfico

c) Para que valor de x se tem $f(x) = 2$? $\frac{6}{7}$

d) Para que valores de x se tem $y > 0$? $x > \frac{4}{7}$

38 A seguir, temos o esboço de um gráfico de uma função do 1º grau cuja lei é do tipo $y = ax + b$.



Determine, no caderno, o sinal:

a) do coeficiente a positivo

b) de y quando $x > 2$ positivo

39 Em seu caderno, estude o sinal das seguintes funções do 1º grau.

a) $y = -7x$ $y = 0$, para $x = 0$; $y > 0$, para $x < 0$; $y < 0$, para $x > 0$

b) $y = x + 5$ $y = 0$, para $x = -5$; $y > 0$, para $x > -5$; $y < 0$, para $x < -5$

40 Dadas as funções definidas por $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = -3x + 6$, determine, no caderno, os valores reais de x para que:

a) $f(x) > 0$ $x > 3$

b) $g(x) > 0$ $x < 2$

c) $f(x) = g(x)$ $x = \frac{12}{5}$

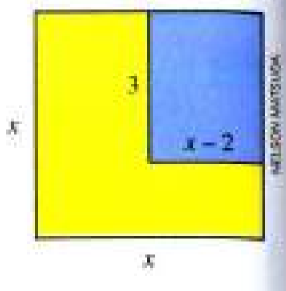
d) $f(x) > g(x)$ $x > \frac{12}{5}$

41 O gráfico da função dada por $y = 6x + p$ passa pelo ponto (1, 11). Determine para que valores reais de x tem-se:

a) $y = 23$ 3

b) $y < 0$ $x < -\frac{5}{6}$

3. Função polinomial do 2º grau



Considere a figura ao lado. Queremos calcular a área da parte amarela em função de x.

Podemos calcular a área do quadrado, que é: x^2

A área do retângulo pintado de azul é: $3(x - 2)$

Então, a área representada pela parte pintada de amarelo é:

$$x^2 - 3(x - 2), \text{ ou seja, } x^2 - 3x + 6$$

Indicando essa área por y, temos: $y = x^2 - 3x + 6$

A função definida pela lei $y = x^2 - 3x + 6$ é um exemplo de **função polinomial do 2º grau** (ou **função quadrática**).

> Uma função polinomial do 2º grau é toda função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, e é definida para todo x real.

Veja outros exemplos de funções do 2º grau, em que destacamos os valores de a, b e c.

a) $y = x^2 - 5x + 4$, sendo $a = 1$, $b = -5$ e $c = 4$

b) $y = 2x^2 + 5x - 2$, sendo $a = 2$, $b = 5$ e $c = -2$

c) $y = x^2 - 9$, sendo $a = 1$, $b = 0$ e $c = -9$

d) $y = -3x^2 + 2x$, sendo $a = -3$, $b = 2$ e $c = 0$

e) $y = x^2$, sendo $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

42 Dada a função definida por $f(x) = x^2 - 5x + 6$, determine em seu caderno:

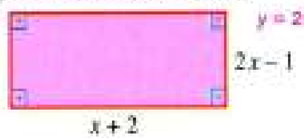
a) $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$: $f(0) = 6$, $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(4) = 2$

b) os valores de x de modo que $f(x)$ seja 0: 2 ou 3

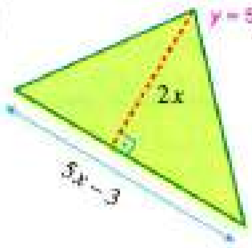
c) os valores de x de modo que $f(x)$ seja 20. -2 ou 7

43 No caderno, expresse a área y de cada polígono em função de x.

a) $y = 2x^2 + 3x - 2$



b) $y = 5x^2 - 3x$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

44 Considere a função dada por $f(x) = x^2 + 3x$. Determine no caderno:

a) $f(0)$: 0

b) os valores de x para que se tenha $y = 0$: 0 ou -3

c) $f(2)$: 10

d) os valores de x para que se tenha $y = 10$. -5 ou 2

45 Sendo $f(x) = 2x^2 + 5$, determine:

a) $f\left(\sqrt{3}\right)$: 11

b) o valor de x para que se tenha $f(x) = 21$. $\pm 2\sqrt{2}$

46 Em seu caderno, expresse na forma $y = ax^2 + bx + c$, o volume do paralelepípedo. $y = 2x^2 + 6x + 4$

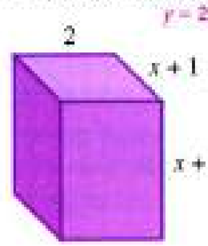


Gráfico de uma função polinomial do 2º grau

Vamos representar graficamente funções polinomiais do 2º grau no plano cartesiano. Acompanhe os exemplos.

a) Representaremos graficamente a função do 2º grau definida por: $y = x^2 - 2x - 3$

Para $x = -2$, temos: $y = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$

Para $x = -1$, temos: $y = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$

Para $x = 0$, temos: $y = (0)^2 - 2 \cdot (0) - 3 = -3$

Para $x = 1$, temos: $y = (1)^2 - 2 \cdot (1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$

Para $x = 2$, temos: $y = (2)^2 - 2 \cdot (2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$

Para $x = 3$, temos: $y = (3)^2 - 2 \cdot (3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$

Para $x = 4$, temos: $y = (4)^2 - 2 \cdot (4) - 3 = 16 - 8 - 3 = 5$

Quadro com alguns pontos do gráfico de $y = x^2 - 2x - 3$

x	y	(x, y)
−2	5	(−2, 5)
−1	0	(−1, 0)
0	−3	(0, −3)
1	−4	(1, −4)
2	−3	(2, −3)
3	0	(3, 0)
4	5	(4, 5)

Indicação dos pontos encontrados no quadro

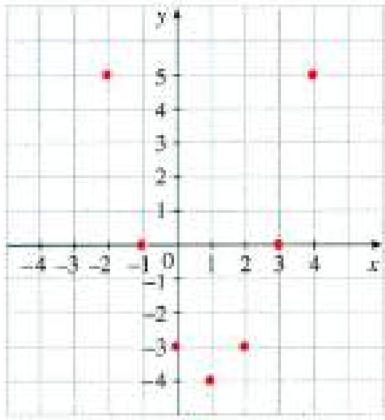
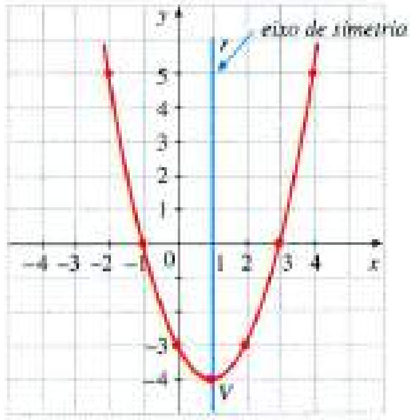


Gráfico da função



O gráfico de uma função do 2º grau é uma curva chamada **parábola**. O ponto V indicado na figura é o **vértice** da parábola.

Toda parábola apresenta um **eixo de simetria**. O eixo de simetria de uma parábola é a reta paralela ao eixo dos y, que passa pelo seu vértice.

No nosso exemplo, a reta r é o eixo de simetria da parábola. Observe que os pontos de abscissas -1 e 3, por exemplo, são simétricos em relação a esse eixo.

Os **zeros** de uma função do 2º grau são as abscissas dos pontos em que a parábola corta o eixo dos x. Observe, no gráfico da função $y = x^2 - 2x - 3$, que:

- o número -1 é zero da função, pois para $x = -1$ temos $y = 0$;
- o número 3 é também zero da função, pois para $x = 3$ temos $y = 0$.

b) Faremos a representação gráfica da função do 2º grau definida por: $y = -x^2 + 4x - 3$

Para $x = 0$, temos: $y = -(0)^2 + 4 \cdot (0) - 3 = 0 + 0 - 3 = -3$

Para $x = 1$, temos: $y = -(1)^2 + 4 \cdot (1) - 3 = -1 + 4 - 3 = 0$

Para $x = 2$, temos: $y = -(2)^2 + 4 \cdot (2) - 3 = -4 + 8 - 3 = 1$

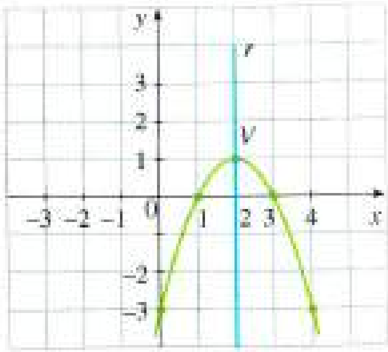
Para $x = 3$, temos: $y = -(3)^2 + 4 \cdot (3) - 3 = -9 + 12 - 3 = 0$

Para $x = 4$, temos: $y = -(4)^2 + 4 \cdot (4) - 3 = -16 + 16 - 3 = -3$

Quadro com alguns pontos do gráfico de $y = -x^2 + 4x - 3$

x	y	(x, y)
0	-3	$(0, -3)$
1	0	$(1, 0)$
2	1	$(2, 1)$
3	0	$(3, 0)$
4	-3	$(4, -3)$

Gráfico da função

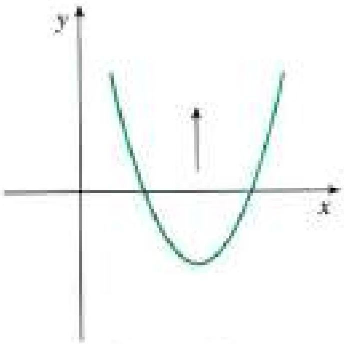


NELSON MATSUDA

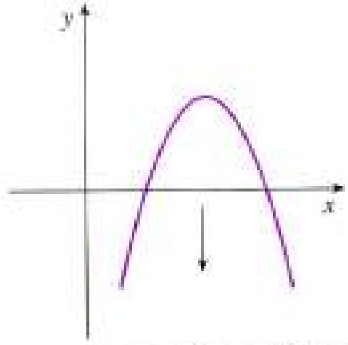
Nesse gráfico, o vértice da parábola é o ponto (2, 1) e a reta *r* é seu eixo de simetria. Os zeros dessa função são 1 e 3, pois são as abscissas dos pontos em que a parábola cruza o eixo dos *x*.

A parábola pode ter a **concavidade** voltada **para cima** ou **para baixo**, conforme observamos nos gráficos dos dois exemplos anteriores.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



Concavidade para cima



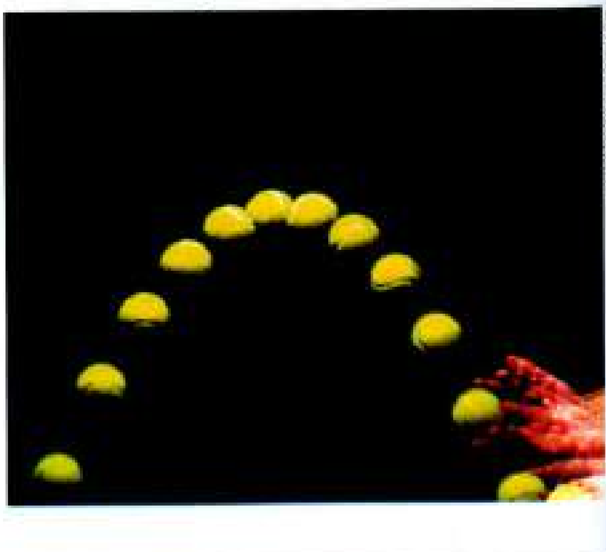
Concavidade para baixo

No primeiro exemplo ($y = x^2 - 2x - 3$), o coeficiente *a* é positivo e a parábola tem a concavidade voltada para cima.

No segundo exemplo ($y = -x^2 + 4x - 3$), o coeficiente *a* é negativo e a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Considerando a função dada por $y = ax^2 + bx + c$, ocorre o seguinte:

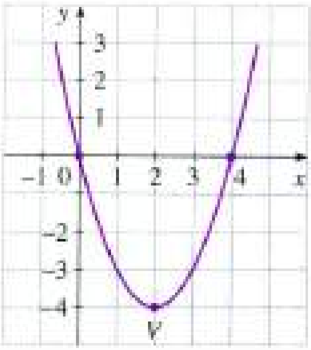
- se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima;
- se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.



Trajetória parabólica descrita por uma bola de tênis.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

47 Considere a parábola e responda às questões em seu caderno.



NELSON MATSUDA

a) Qual é o sinal do coeficiente a? positivo

b) Quais são as coordenadas do vértice da parábola? (2, −4)

c) Quais são os zeros da função correspondente a esse gráfico? 0 e 4

d) Identifique o ponto de intersecção entre o eixo dos x e o eixo de simetria da parábola. (2, 0)

48 As medidas das diagonais de um losango são expressas por $(x + 2)$ e $(2x + 4)$. Determine em seu caderno: $y = x^2 + 4x + 4$

a) a área y desse losango em função de x;

b) para que valor de x esse losango tem área 25. 3

49 O gráfico de cada uma das seguintes funções é uma parábola. Determine, em seu caderno, os casos em que a parábola tem concavidade voltada para cima. a, d, e

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$

b) $y = -x^2 + 4x - 4$

c) $y = -3x^2 + x - 4$

d) $y = x^2 + 5x$

e) $y = x^2$

f) $y = -x^2 + 9$

50 Considere a parábola abaixo e determine:

a) x quando $y = -3$; −2 e 2

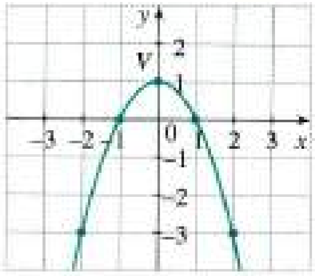
b) x quando $y = 2$; não existe

c) y quando $x = 2$; −3

d) $f(1)$; 0

e) os zeros da função; −1 e 1

f) as coordenadas do vértice. (0, 1)



NELSON MATSUDA

51 Determine, em seu caderno, os valores de p na função definida por $y = (p - 3)x^2 - 5x - 24$ para que a parábola tenha a concavidade voltada para cima. $p > 3$

52 Determine, em seu caderno, os valores de p na função definida por $y = (2p + 1)x^2 - 2x + 1$ para que a parábola tenha a concavidade voltada para baixo. $p < -\frac{1}{2}$

53 Uma função do 2º grau é definida por:
$y = (m + 2)x^2 + (m + 3)x + m + 4$
Em seu caderno, responda:

a) Para que valores reais de m, o gráfico dessa função tem concavidade voltada para baixo? $m < -2$

b) Para que valores reais de m, o gráfico dessa função passa pelo ponto (0, 0)? $m = -4$

Esboço do gráfico de uma função polinomial do 2º grau

Antes de fazermos o esboço de uma parábola, devemos determinar os zeros da função e identificar sua concavidade.

Acompanhe um exemplo:

Vamos determinar os zeros da função dada por: $y = x^2 - 3x - 10$

$x^2 - 3x - 10 = 0 \quad (a = 1, b = -3 \text{ e } c = -10)$

$\Delta = b^2 - 4ac$

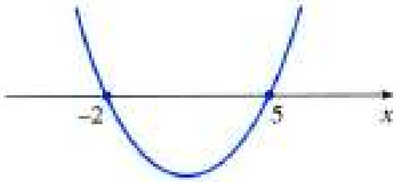
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 \qquad \sqrt{\Delta} = 7$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm 7}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} \begin{cases} \dfrac{3+7}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ \textbf{ou} \\ \dfrac{3-7}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Portanto, os zeros da função dada por $y = x^2 - 3x - 10$ são: -2 e 5

Como $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima. Desse modo podemos fazer o seguinte esboço do gráfico da função: $y = x^2 - 3x - 10$



Veja outros exemplos.

a) $y = -2x^2 + 5x - 2$

$-2x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2)$

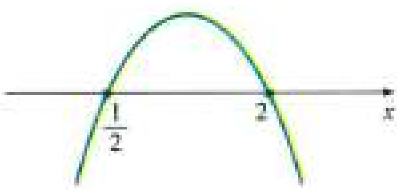
$\Delta = 25 - 16 = 9$

$\sqrt{\Delta} = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(5) \pm 3}{2 \cdot (-2)} = \frac{-5 \pm 3}{-4} \begin{cases} \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2} \\ \textbf{ou} \\ \dfrac{-8}{-4} = 2 \end{cases}$$

Como $a = -2$, portanto $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.



VICENTE MENDONÇA

b) $y = 4x^2 - 4x + 1$

$4x^2 - 4x + 1 = 0$

Como o 1º membro dessa equação é um trinômio quadrado perfeito, podemos escrever:

$$(2x - 1)^2 = 0$$

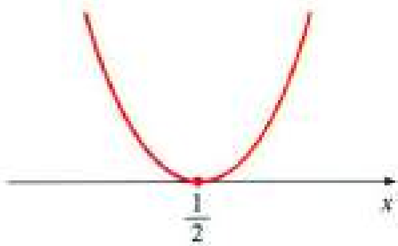
Assim, temos:

$2x - 1 = 0$

$2x = 0$

$x = \frac{1}{2}$

Como $a = 4$, portanto $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.



VICENTE MENDONÇA

c) $y = -3x^2 + 2x - 1$

$-3x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

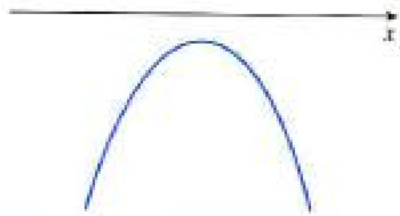
$\Delta = (2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1)$

$\Delta = 4 - 12 = -8$

$\Delta < 0$

Então, a equação não tem raízes reais.

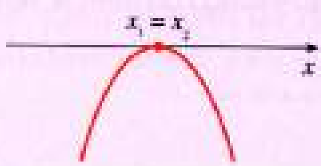
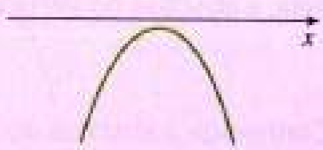
Como $a = -3$, portanto $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.



VICENTE MENDONÇA

NELSON MATSUDA

No esboço do gráfico de uma função quadrática, podem ocorrer os seguintes casos:

$\Delta > 0$ **A parábola corta o eixo dos *x* em dois pontos distintos**	**$a > 0$** **concavidade para cima**	
	$a < 0$ **concavidade para baixo**	
$\Delta = 0$ **A parábola tangencia o eixo dos *x*.**	**$a > 0$** **concavidade para cima**	
	$a < 0$ **concavidade para baixo**	
$\Delta < 0$ **A parábola não corta o eixo dos *x*.**	**$a > 0$** **concavidade para cima**	
	$a < 0$ **concavidade para baixo**	

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Relembrar os alunos que ao resolver uma equação do 2º grau em $\mathbb{R}$, temos três possibilidades:
$\Delta > 0$ (a equação tem duas raízes reais e distintas, x_1 e x_2);
$\Delta = 0$ (a equação tem duas raízes reais e iguais, $x_1 = x_2$);
$\Delta < 0$ (a equação não tem raízes reais).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

54 Em seu caderno, determine os zeros (se existentes) das funções quadráticas e faça um esboço do gráfico de cada uma: construção de esboço

a) $y = x^2 - 6x + 8$ 2 e 4
b) $y = x^2 + 2$ Não existem.
c) $y = -x^2 + 4x$ 0 e 4
d) $y = x^2 - 6x + 9$ 3
e) $y = -9x^2 + 12x - 4$ $\frac{2}{3}$
f) $y = 2x^2 - 2x + 1$ Não existem.

55 A trajetória de um projétil lançado por um canhão, em um local plano e horizontal, é dada pela função:

$$y = \frac{-x^2}{32} + \frac{x}{8}$$

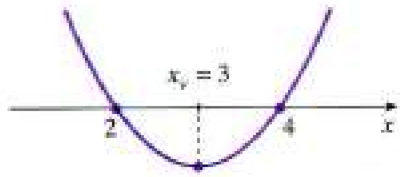
Em seu caderno, determine a que distância do canhão caiu o projétil, considerando que x e y são distâncias dadas em quilômetro. 4 km

Coordenadas do vértice da parábola

Observe os seguintes esboços de gráficos de funções polinomiais do 2º grau com $\Delta > 0$:

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

a)



b)

Devido à simetria presente nas parábolas, os pontos cujas abscissas são os zeros da função são simétricos em relação ao vértice. Por isso, a **abscissa** do vértice da parábola é obtida pela semissoma dos zeros da função.

No esboço do item **a**, temos:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

No esboço do item **b**, temos:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Como a soma das raízes de uma equação do 2º grau é obtida por $S = \frac{-b}{a}$, podemos concluir que:

$$x_v = \frac{x + x_2}{2} = \frac{S}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$$

ou seja, a abscissa do vértice da parábola é dada por: $\boxed{x_v = \frac{-b}{2a}}$

Conhecida a abscissa do vértice da parábola, o valor da **ordenada** é obtido atribuindo-se o valor de x_V à variável x da função dada.

Vamos determinar as coordenadas do vértice da parábola das funções quadráticas:

a) $y = x^2 - 8x + 15$

- Abscissa do vértice:

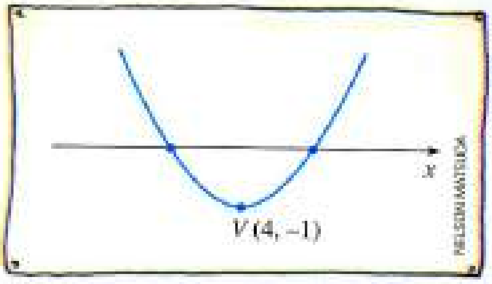
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2 \cdot (1)} = \frac{8}{2} = 4$$

- Ordenada do vértice:

Substituindo x por 4 na função

$y_v = (4)^2 - 8 \cdot (4) + 15 = 16 - 32 + 15 = -1$

Logo, o vértice da parábola é: $V(4, -1)$



b) $y = 2x^2 - 3x + 2$

- Abscissa do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2 \cdot (2)} = \frac{3}{4}$$

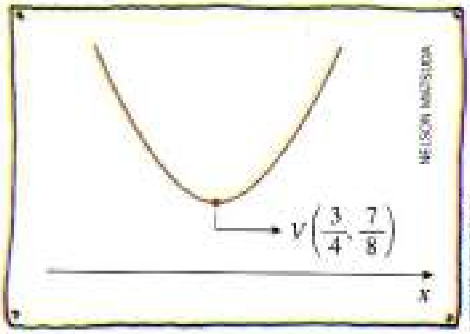
- Ordenada do vértice:

$$y_v = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + 2 =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{9}{16}\right) - \frac{9}{4} + 2 = \frac{18}{16} - \frac{9}{4} + 2 =$$

$$= \frac{18}{16} - \frac{36}{16} + \frac{32}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

Portanto, o vértice da parábola é: $V\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

56 Determine no caderno as coordenadas do vértice da parábola em cada caso.

a) $y = -x^2 - 8x + 16$ $V(-4, 32)$

b) $y = 2x^2 + 6x$ $V\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

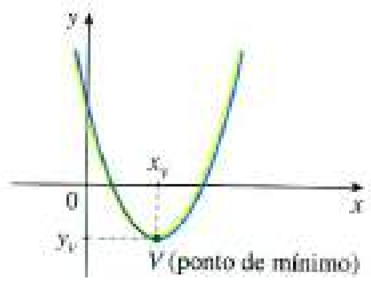
c) $y = x^2 - 16$ $V(0, -16)$

57 O ponto de vértice da parábola definida pela função $y = 3x^2 - px + 2q$ é dado por $V(2, 1)$. Determine os valores reais de p e q em seu caderno. $p = 12$ e $q = \frac{13}{2}$

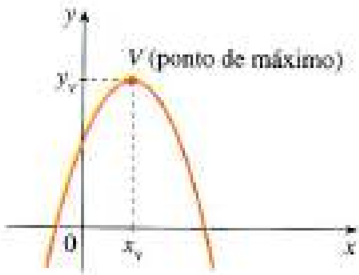
Valor máximo e valor mínimo de uma função polinomial do 2º grau

Considere as funções do 2º grau cujos gráficos estão representados abaixo:

$a > 0$



$a < 0$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Examinando esses gráficos, podemos dizer que:

- Se $a > 0$, o vértice é o ponto da parábola que tem ordenada mínima. Nesse caso, o vértice é chamado de **ponto de mínimo** e a ordenada do vértice é chamada de **valor mínimo** da função.
- Se $a < 0$, o vértice é o ponto da parábola que tem ordenada máxima. Nesse caso, o vértice é chamado de **ponto de máximo** e a ordenada do vértice é chamada de **valor máximo** da função.

Veja os exemplos.

a) Para que valor de x a função $y = -2x^2 + 6x + 1$ tem valor máximo?

O ponto de máximo de uma função do 2º grau é o vértice V. Como queremos o valor de x, devemos calcular x_v.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(+6)}{2 \cdot (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Logo, a função tem valor máximo para: $x = 1{,}5$

b) Determinar o valor mínimo da função: $y = x^2 - 10x + 24$

O valor mínimo de uma função do 2º grau é dado pela ordenada y_v do vértice da parábola. Primeiro calculamos x_v.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{10}{2} = 5$$

Agora calculamos y_v, substituindo na função x por 5.

$$y_v = 5^2 - 10 \cdot 5 + 24 = 25 - 50 + 24 = -1$$

Logo, o valor mínimo dessa função é: -1

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

58 Verifique se a função tem ponto de máximo ou de mínimo.

a) $y = 4x^2 - 9x + 2$ ponto de mínimo
b) $y = x^2 + 3x - 70$ ponto de mínimo
c) $y = -x^2 + 14x - 24$ ponto de máximo
d) $y = 5x^2 - 6x$ ponto de mínimo
e) $y = -3x^2 + 9x$ ponto de máximo
f) $y = -2x^2 - 50$ ponto de máximo

59 Em seu caderno, calcule x para que a função tenha valor mínimo:

a) $y = 3x^2 - 4x + 1$ $\frac{2}{3}$
b) $y = x^2 + 12x + 11$ -6

60 Em seu caderno, calcule x para que a função tenha valor máximo:

a) $y = -2x^2 + 11x - 5$ $\frac{11}{4}$
b) $y = -2x^2 + 25x - 150$ $\frac{25}{4}$

61 Calcule o valor máximo da função dada por $y = -x^2 + 11x - 18$. $\frac{49}{4}$

62 Calcule o valor mínimo da função expressa por: $y = x^2 - 6x + 8$ -1

63 Fernando demarcou uma região retangular de 100 m de perímetro no terreno que possui, para construir uma casa.
Calcule, no caderno, as dimensões desse terreno para que Fernando possa aproveitar a maior área possível. A maior área é obtida por um quadrado de 25 m de lado.

64 O custo **C**, em real, de um produto é dado por $C(x) = x^2 - 80x + 3.000$, sendo x a quantidade de unidades produzidas.

a) Qual deve ser a quantidade de unidades para que o custo seja mínimo? 40 unidades
b) Qual é o valor desse custo mínimo? R$ 1.400,00

Construção do gráfico de uma função polinomial do 2º grau

Podemos agora, com maior precisão, construir o gráfico da função quadrática. Para isso, procedemos da seguinte maneira:

- determinamos as coordenadas do vértice V;
- atribuímos a x valores simétricos a x_V e calculamos os correspondentes valores de y;
- construímos um quadro com os valores encontrados;
- marcamos os pontos obtidos no plano cartesiano;
- traçamos o gráfico (a parábola).

Como exemplo, vamos construir no plano cartesiano o gráfico de três funções de 2º grau.

a) $y = x^2 - 4x + 3$

Coordenadas do vértice

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot (1)} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ y_v = (2)^2 - 4 \cdot (2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \end{array}\right\} V\,(2, -1)$$

Portanto, $V(2, -1)$ é o vértice da parábola.

Vamos atribuir a x valores simétricos a x_v.

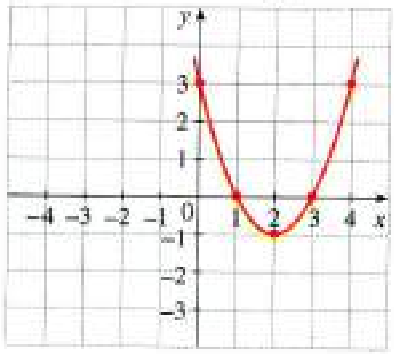
$$\underbrace{0 \qquad\qquad 1}_{\textbf{Valores menores}} \qquad\qquad \underset{x_v}{\boxed{2}} \qquad\qquad \underbrace{3 \qquad\qquad 4}_{\textbf{Valores maiores}}$$

Para $x = 0$, temos: $y = (0)^2 - 4 \cdot (0) + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$
Para $x = 1$, temos: $y = (1)^2 - 4 \cdot (1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$
Para $x = 3$, temos: $y = (3)^2 - 4 \cdot (3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$
Para $x = 4$, temos: $y = (4)^2 - 4 \cdot (4) + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$

Quadro com alguns pontos simétricos ao vértice do gráfico de $y = x^2 - 4x + 3$

x	y	(x, y)	
0	3	(0, 3)	
1	0	(1, 0)	
2	−1	**(2, −1)**	V
3	0	(3, 0)	
4	3	(4, 3)	

Gráfico da função



NELSON MATSUDA

b) $y = -x^2 + 4x - 4$

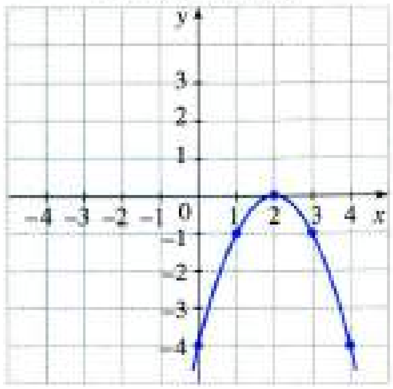
Coordenadas do vértice

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \\ y_v = -(2)^2 + 4 \cdot (2) - 4 = -4 + 8 - 4 = 0 \end{array}\right\} V(2, 0)$$

Quadro com alguns pontos simétricos ao vértice do gráfico de $y = -x^2 + 4x - 4$

x	y	(x, y)	
0	−4	(0, −4)	
1	−1	(1, −1)	
2	0	**(2, 0)**	V
3	−1	(3, −1)	
4	−4	(4, −4)	

Gráfico da função



NELSON MATSUDA

c) $y = x^2 - 2x + 2$

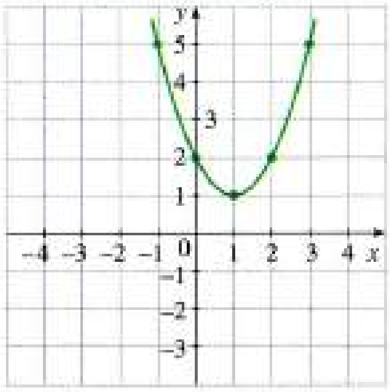
Coordenadas do vértice

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot (1)} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_v = (1)^2 - 2 \cdot (1) + 2 = 1 - 2 + 2 = 1 \end{array}\right\} V(1, 1)$$

Quadro com alguns pontos simétricos ao vértice do gráfico de $y = x^2 - 2x + 2$

x	y	(x, y)	
−1	5	(−1, 5)	
0	2	(0, 2)	
1	1	**(1, 1)**	V
2	2	(2, 2)	
3	5	(3, 5)	

Gráfico da função



NELSON MATSUDA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

65 Construa o gráfico das funções quadráticas em uma folha de papel quadriculado. construção de gráficos

a) $y = x^2 + 2x - 8$
b) $y = -x^2 + 6x - 5$
c) $y = 3x^2 - 12x + 9$
d) $y = -x^2 + x + 1$
e) $y = -x^2$
f) $y = x^2 - x + 2$

66 Construa, em uma folha de papel quadriculado, os gráficos das funções dadas por $y = x^2 - 4$ e $y = -x^2 + 4$ em um mesmo plano cartesiano e determine os pontos de cruzamento desses dois gráficos. (−2, 0) e (2, 0)

67 Reúna-se com um colega para fazer esta atividade.

Usando uma folha de papel quadriculado, para cada item construam, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções dadas pelas seguintes leis: construção de gráficos

a) $y = x^2$, $y = x^2 + 1$ e $y = x^2 - 1$
b) $y = x^2$ e $y = -x^2$
c) $y = x^2$, $y = 2x^2$ e $y = 4x^2$

Comparando os gráficos em cada plano cartesiano, o que vocês podem observar? resposta pessoal

Estudo do sinal de uma função polinomial do 2º grau

Já vimos que estudar o sinal de uma função é determinar os valores reais de x que tornam a função positiva, negativa ou nula.

Também já vimos como determinar os zeros de uma função quadrática (valores de x que anulam a função) e como esboçar seu gráfico.

Agora, acompanhe alguns exemplos do estudo do sinal de funções do 2º grau.

a) Estudar o sinal da função dada por: $y = x^2 - 6x + 8$

Podemos fazer esse estudo por meio do esboço do gráfico da função. Para isso, temos de calcular os valores de x que anulam essa função (zeros da função).

Zeros da função

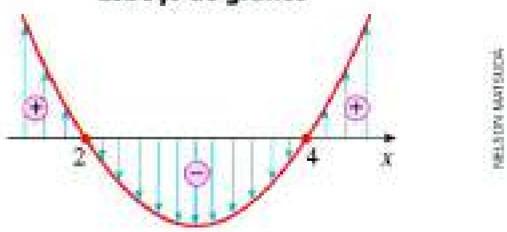
$x^2 - 6x + 8 = 0 \qquad (a = 1, b = -6, c = 8)$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

$$x = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} \dfrac{6+2}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ \text{ou} \\ \dfrac{6-2}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Esboço do gráfico



Estudo do sinal

- Para $x < 2$ ou $x > 4$, temos: $y > 0$
- Para $x = 2$ ou $x = 4$, temos: $y = 0$
- Para x entre 2 e 4, temos: $y < 0$

b) Estudar o sinal da função dada por: $y = -x^2 - 6x - 9$

Zeros da função

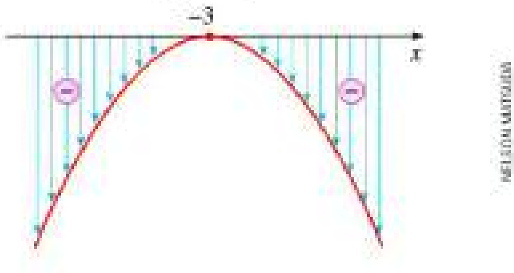
$-x^2 - 6x - 9 = 0 \qquad (a = -1, b = -6, c = -9)$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$

$$x = \frac{-(-6)}{2(-1)} = \frac{6}{-2} = -3$$

Esboço do gráfico



Estudo do sinal

- Para $x \neq -3$, temos: $y < 0$
- Para $x = -3$, temos: $y = 0$
- Não existe valor real de x que torne a função positiva.

c) Estudar o sinal da função dada por: $y = x^2 - 3x + 3$

Zeros da função

$x^2 - 3x + 3 = 0 \qquad (a = 1, b = -3, c = 3)$

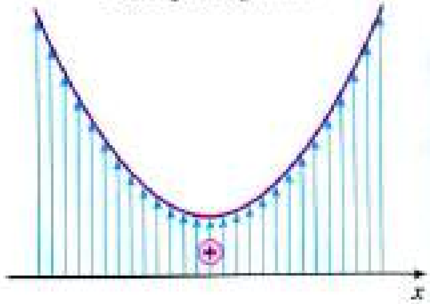
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3$

A função não tem zeros reais.

Estudo do sinal

- A função nunca se anula e não existe valor de x real que a torne negativa, ou seja, para qualquer x real a função é sempre positiva.

Esboço do gráfico



NELSON MATSUDA

EXERCÍCIO PROPOSTO

68 Estude, em seu caderno, o sinal das seguintes funções.

a) $y = x^2 - 3x + 2$ a) $x < 1$ ou $x > 2$; $y > 0$; $x = 1$ ou $x = 2$; $y = 0$; $1 < x < 2$; $y < 0$

b) $y = 6x^2 - 5x + 1$ b) $x < \frac{1}{3}$ ou $x > \frac{1}{2}$; $y > 0$; $x = \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{1}{2}$; $y = 0$; $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$; $y < 0$

c) $y = -2x^2 - 5x + 3$ c) $-3 < x < \frac{1}{2}$; $y > 0$; $x = -3$ ou $x = \frac{1}{2}$; $y = 0$; $x < -3$ ou $x > \frac{1}{2}$; $y < 0$

d) $y = x^2 + 8x + 16$ $x \neq -4$; $y > 0$; $x = -4$; $y = 0$

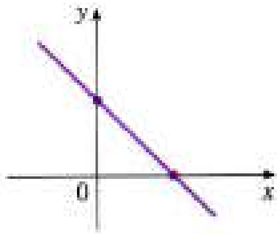
e) $y = -x^2 + 12x - 36$ $x = 6$; $y = 0$; $x \neq 6$; $y < 0$

f) $y = 3x^2 - 2x + 1$ Para qualquer x real a função é sempre positiva.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

69 Resolva a questão no caderno.

(PUC-PR) O gráfico abaixo é o da reta $y = ax + b$, quando: alternativa b



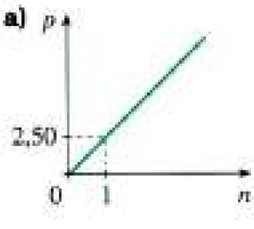
NELSON MATSUDA

a) $a < 2$ **b)** $a < 0$ **c)** $a = 0$ **d)** $a > 0$ **e)** $a = 2$

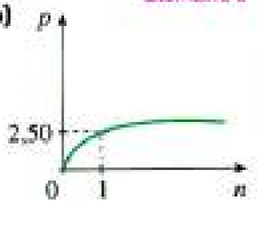
70 Identifique oralmente a alternativa correta.

(Saresp) Um quilograma de certo produto custa R$ 2,50. Dos gráficos a seguir, o que melhor representa o preço p pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é: alternativa a

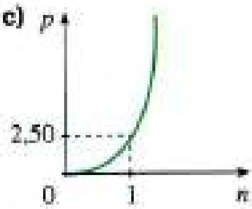
a)



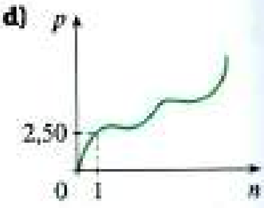
b)



c)



d)

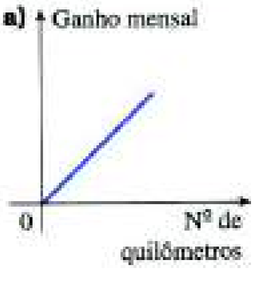


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

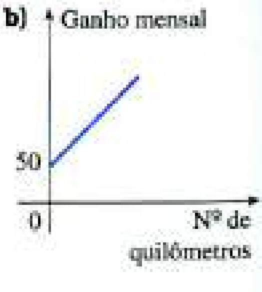
71 Identifique, no caderno, o gráfico correto.

(Saresp) Um *motoboy*, para fazer entregas ou retirar documentos de escritórios espalhados pela cidade de São Paulo, recebe R$ 3,00 por quilômetro rodado. Suponhamos que ele passe a receber, mensalmente, um auxílio fixo de R$ 50,00. O gráfico que representa o seu ganho mensal, em reais, em função dos quilômetros rodados é: alternativa b

a)

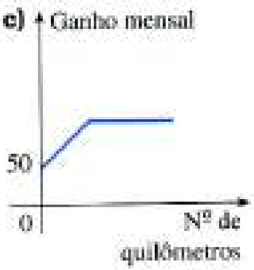


b)



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

c)



d)

72 Resolva em seu caderno:
(Unifor-CE) A função f do 1º grau é definida por $f(x) = -3x + k$. O valor de k para que o gráfico de f corte o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 5 é: alternativa e

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

73 Considere a função definida por $y = x^2 - 2x + 1$.
Faça o que se pede em seu caderno.

a) Determine o(s) zero(s) dessa função. 1
b) Construa o gráfico da função. construção de gráfico
c) Para que valores de x temos $y = 1$? $x = 0$ ou $x = 2$
d) Para que valores de x temos $y > 0$? para $x \neq 1$

74 A temperatura, em grau Celsius, no interior de uma câmara frigorífica é dada por uma função cuja lei é $y = t^2 - 7t + c$, em que t indica o tempo e y indica a temperatura. No caderno, faça o que se pede.

a) Sabendo que para $t = 0$ a temperatura é de 10 °C, calcule o valor de c. $c = 10$
b) Qual é a lei da função? $y = t^2 - 7t + 10$
c) Calcule o valor de t para que a temperatura seja a mínima possível. 3,5 minutos

75 A fórmula que determina a velocidade do som no ar (em metro por segundo) em função da temperatura t (em grau Celsius) é $v = 20\sqrt{273 + t}$.
Calcule, no caderno, a velocidade do som no ar à temperatura de 16 °C. 340 m/s

76 Faça os cálculos no caderno.
(UCSal-BA) A parábola de equação $y = 2x^2 - 3x + 1$ corta o eixo das abscissas nos pontos: alternativa d

a) (0, 0) e (3, 0)
b) (0, 1) e (0, 2)
c) (0, 1) e $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
d) (1, 0) e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
e) (2, 0) e (1, 0)

77 O custo (C) de certo produto é obtido pela função definida por $C = x^2 - 50x + 2$, em que x representa a quantidade do produto. Calcule, no caderno, o valor de x para que o custo seja mínimo. 25

78 Determine no caderno.
(PUC-MG) O valor máximo da função $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ é: alternativa b

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

79 Resolva o problema no caderno.
(PUC-Campinas-SP) Uma bola é largada do alto de um edifício e cai em direção ao solo. Sua altura h em relação ao solo, t segundos após o lançamento, é dada pela expressão $h = -25t^2 + 625$. Após quantos segundos do lançamento a bola atingirá o solo? alternativa b

a) 2,5 **b)** 5 **c)** 7 **d)** 10 **e)** 25

80 Encontre, em seu caderno, a altura pedida.
(UFRGS-RS) Uma bola colocada no chão é chutada para o alto, percorrendo uma trajetória descrita por $y = -2x^2 + 12x$, em que y é a altura dada em metro. A altura máxima atingida pela bola é: alternativa b

a) 36 m **b)** 18 m **c)** 12 m **d)** 6 m **e)** 3 m

81 Resolva no caderno.
Um engenheiro vai projetar uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo, cujas dimensões, em metro, são expressas por x, $(20 - x)$ e 2. Qual é o maior volume que essa piscina poderá ter, em m^3? 200 m^3

82 Copie a afirmação correta em seu caderno.
(ESPM-SP) A estrutura do lucro de uma pequena empresa pode ser estudada através da equação $y = -x^2 + 120x - 2.000$, sendo y o lucro em real quando a empresa vende x unidades. Com base nisso, pode-se afirmar que: alternativa a

a) o lucro é máximo quando $x = 60$.
b) o lucro é máximo quando $x = 1.600$.
c) o lucro é máximo quando $x = 20$ ou $x = 100$.
d) o lucro é máximo quando $x > 2.000$.
e) o lucro é máximo quando $x < 20$ ou $x > 100$.

83 O lucro (L) de uma empresa para certo produto é obtido pela função definida por $L = -2x^2 + 2.000x - 100$ (x representa a quantidade do produto). Calcule para quantas unidades se obtém o lucro máximo possível. 500

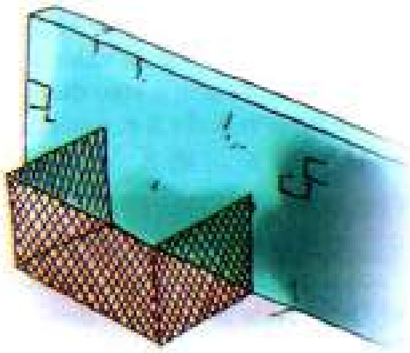
84 Resolva no caderno:
(Fesp-SP) Considere a função quadrática $f(x) = (m + 1)x^2 - 5x + 5$.

a) Para que valores de m o gráfico da função tem concavidade voltada para baixo? $m < -1$
b) Para que valor de m o gráfico da função tangencia o eixo das abscissas? $m = \frac{1}{4}$

DIVERSIFICANDO

Cercando

Em seu quintal, José pretende construir um galinheiro de modo que, com os 40 m de tela de arame que comprou, consiga ter o melhor aproveitamento possível. Para isso, ele resolveu usar o muro do quintal como um dos lados do galinheiro. Veja a ilustração ao lado.



Podemos representar, com expressões algébricas, a área do galinheiro: $A = x \cdot z$ (I); e o comprimento da tela: $x + 2z = 40$ (II).

Vamos isolar z no primeiro membro de (II) $z = -\frac{x}{2} + 20$. Substituindo o valor de z em (I), temos a lei da área em função de x:

$$A(x) = -\frac{x^2}{2} + 20x$$

Com o auxílio do texto e da ilustração acima, façam nos cadernos, em grupo, o que se pede.

a) Atribuindo valores 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, para x, construam uma tabela como esta: construção de tabela

x	z	$A = x \cdot z$	$A(x) = -\frac{x^2}{2} + 20x$

b) Para que valor de x a área é máxima? Qual é essa área? 20; 200 m²

c) Em papel quadriculado, esbocem o gráfico da função $A(x) = -\frac{x^2}{2} + 20x$. construção de figura

d) Esse gráfico apresenta um ponto de máximo ou de mínimo? máximo

e) Calculem as coordenadas do vértice da parábola da função $A(x) = -\frac{x^2}{2} + 20x$ e comparem-nas com a resposta do item **b**. Espera-se que os alunos percebam que a ordenada do vértice é a área máxima.

f) Resolvam o problema de José caso ele tivesse comprado 20 m de arame.

Os alunos podem resolver este item substituindo valores (itens **a** e **b**) ou algebricamente (lei da função e coordenadas do gráfico).

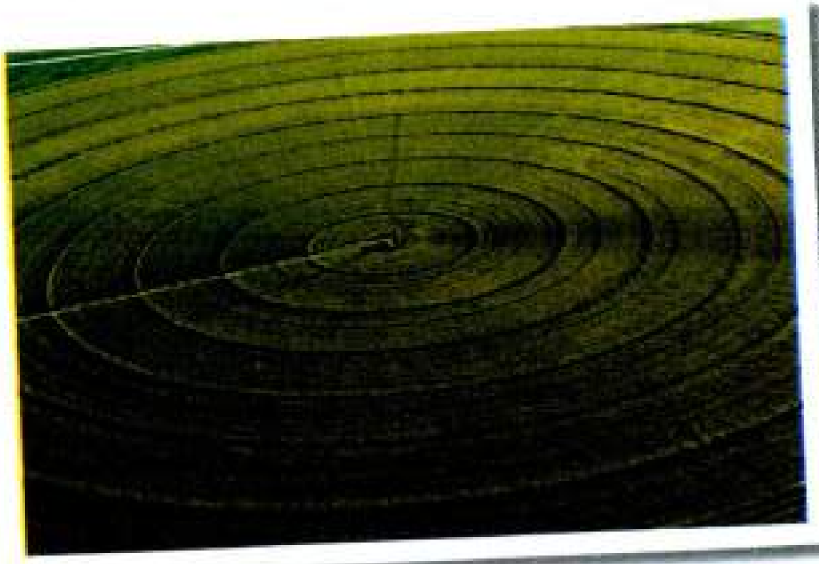
Matemática no aperto de mão

Logo depois da festa de formatura, a família de Juliana resolveu comemorar em uma pizzaria. Ao se despedirem, todos os familiares apertaram-se as mãos. Juliana reparou que o total de cumprimentos foi 78. Lembrando que, quando uma pessoa cumprimenta outra, a outra também está cumprimentando essa pessoa, portanto conta-se como um só cumprimento, quantas pessoas foram comemorar nessa pizzaria? 13

CAPÍTULO

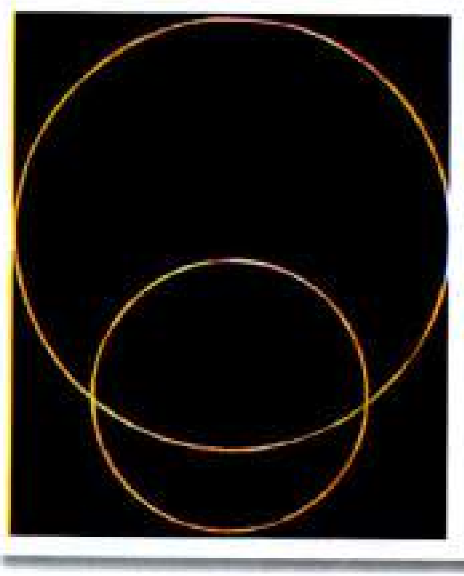
8 Circunferência, arcos e relações métricas

1. Circunferência e arcos de circunferência



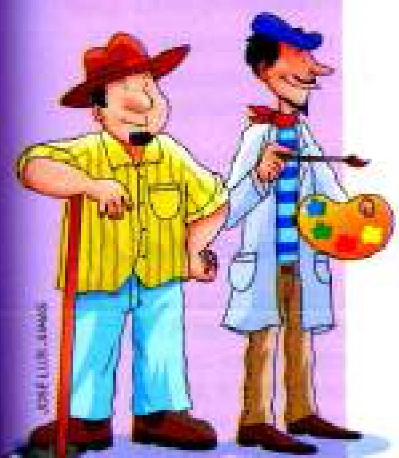
Plantação com sistema de irrigação com pivô central. (Foto de 2006).

Os desenhos na plantação dão ideia de circunferência.



As figuras utilizadas na obra de arte também dão ideia de circunferência.

Dois Círculos, *de Aleksandr Mikhailovich Rodchenko, 1919. Óleo sobre tela, 25, 4 × 21,3 cm.*



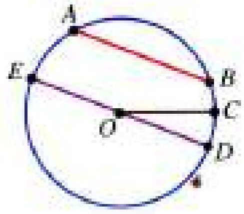
JOSÉ LUÍS JUHAS

Em outro momento, você já estudou circunferências. Vamos, agora, recordar um pouco do que foi visto:

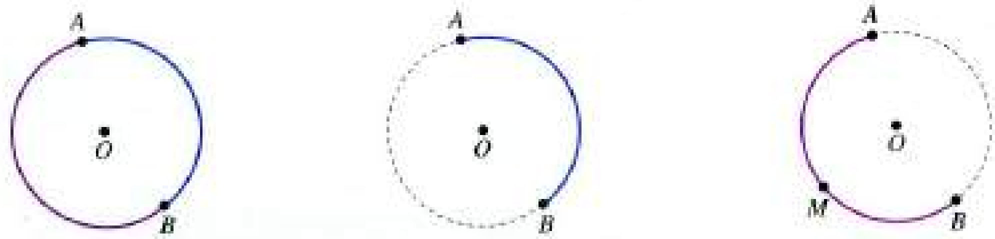
Circunferência é a linha formada por todos os pontos de um plano que estão à mesma distância de um ponto fixo desse plano.

Na circunferência ao lado:

- O é o centro;
- $\overline{AB}$ é uma corda;
- $\overline{OC}$ é um dos raios;
- $\overline{DE}$ é um dos diâmetros.



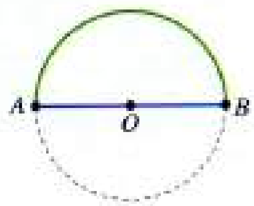
Considere dois pontos distintos de uma circunferência. Esses pontos a dividem em duas partes chamadas de **arco**.



Arco $\widehat{AB}$: arco menor

Arco $\widehat{AMB}$: arco maior

Quando os dois pontos coincidirem com os extremos de um diâmetro, cada um dos arcos será chamado de **semicircunferência**.



Comprimento de uma circunferência

Você já viu que a razão entre o comprimento (C) de uma circunferência e a medida de seu diâmetro (d) é igual a π ($\pi = 3{,}141592653...$), ou seja:

$$\frac{C}{d} = \pi \quad \text{ou} \quad \frac{C}{2r} = \pi \quad \text{ou} \quad C = 2\pi r$$

em que r é o raio da circunferência.

Exemplos:

a) Calcular o comprimento de uma circunferência de 8 cm de raio, considerando $\pi = 3{,}14$.

$r = 8$ cm e $C = 2\pi r$

$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8$

$C = 50{,}24$ cm

Logo, a circunferência tem 50,24 cm de comprimento.

b) Calcular o raio de uma circunferência de 37,68 cm de comprimento, considerando $\pi = 3{,}14$.

$C = 37{,}68$ cm e $C = 2\pi r$

$2\pi r = 37{,}68$

$2 \cdot 3{,}14 \cdot r = 37{,}68$

$6{,}28 \cdot r = 37{,}68$

$r = 6$ cm

Logo, o raio da circunferência mede 6 cm.

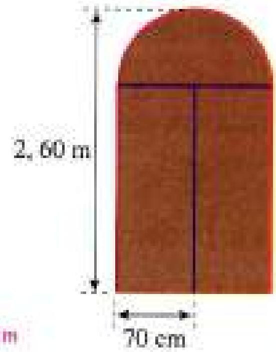
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(Para os exercícios seguintes, adote $\pi = 3{,}14$.)

1 Um ciclista deu 500 pedaladas completas. O raio da roda da bicicleta desse ciclista mede 25 cm. Determine, em seu caderno, quantos metros ele percorreu aproximadamente. 785 m

2 Um marceneiro construiu uma porta com as características da figura ao lado:

Determine, em seu caderno, o comprimento do acabamento em madeira destacado em vermelho na figura. 5,998 m



3 Construa, em seu caderno, uma circunferência de raio r. Trace dois diâmetros, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, perpendiculares entre si. Determine a diferença entre o comprimento da circunferência e o perímetro do quadrado $ABCD$ em função de r. (Use $\sqrt{2} = 1{,}41$.) $0{,}64r$

4 Uma polegada equivale a cerca de 2,5 cm. O diâmetro de um cano é de $\frac{3}{4}$ de polegada. Quantos centímetros isso representa, aproximadamente? 1,875 cm

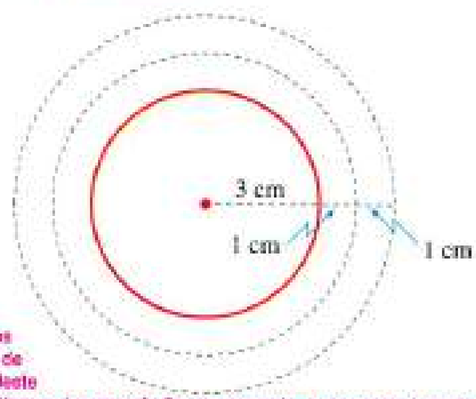
5 A roda de uma moto tem 70 cm de diâmetro. Se ela der 10 voltas completas por segundo, qual será a velocidade aproximada, em quilômetros por hora, dessa roda? 79,128 km/h

6 O diâmetro de uma praça circular mede 118 m. Edu e Ari, partindo de um mesmo ponto, correm em torno dela em sentido contrário, e param ao se encontrar. Nesse instante, Edu havia percorrido 192,52 m. Quanto Ari havia corrido, aproximadamente? 178 m

7 Em outra praça circular, Teca e Lia fazem o mesmo. Quando elas se encontraram, Teca havia corrido 180 m e Lia, 196,8 m. Qual é a medida aproximada do raio dessa praça? 60 m

8 Uma pista circular de corrida de *kart* foi construída a partir de duas circunferências concêntricas de comprimentos 1.500 m e 1.200 m. Determine, em seu caderno, a largura aproximada dessa pista. 47,77 m

9 Lucila traçou uma circunferência de 3 cm de raio. Depois traçou outras circunferências, concêntricas à primeira, aumentando o raio de 1 em 1 centímetro. Quantas circunferências ela deverá traçar até encontrar aquela que tenha o triplo do comprimento da primeira? 6 circunferências



Explorar as diferentes estratégias de resolução deste problema. Alguns alunos poderão, por exemplo, acrescentar 1 cm ao raio e calcular o comprimento de cada circunferência. Outros poderão analisar as expressões $C_1 = 2 \cdot \pi \cdot 3$ e $C_2 = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 3$

Pense mais um pouco...

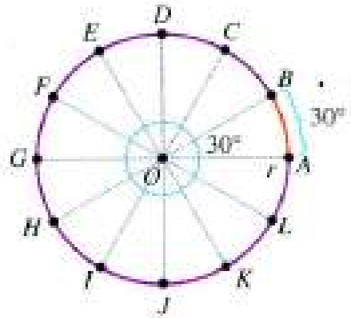
A figura ao lado representa uma lata de formato cilíndrico.

Em seu caderno, calcule quantos centímetros de fita adesiva são necessários, aproximadamente, para contornar essa lata sobre a linha vermelha. 26,4 cm

2. Arco de circunferência

Considere uma circunferência dividida em 12 arcos de mesma medida angular. A soma de todas as medidas angulares desses arcos é igual à medida angular de uma circunferência (360°) e, portanto, cada um deles mede 30° (360° : 12).

A medida angular (em grau) de um arco é igual à medida do ângulo central correspondente. Na circunferência ao lado, destacamos o arco $\overset{\frown}{AB}$, correspondente ao ângulo central $A\hat{O}B$. Indicamos a medida angular desse arco por $m(\overset{\frown}{AB}) = 30°$.

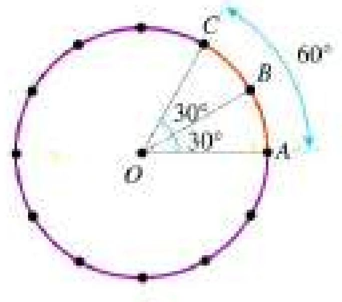


Vimos que o comprimento de uma circunferência em determinada unidade de medida de comprimento é dado por: $C = 2\pi r$.

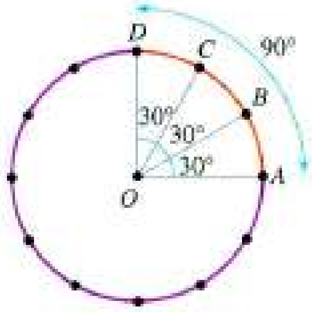
O arco $\overset{\frown}{AB}$ da figura é $\frac{1}{12}$ da circunferência, então podemos dizer que o comprimento desse arco, na mesma unidade de medida, é igual a $\frac{2\pi r}{12}$.

Observe algumas relações que podemos estabelecer entre a medida angular e o comprimento de arcos de uma mesma circunferência:

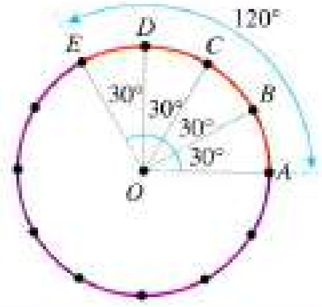
- Um arco de medida angular de 60° tem o dobro do comprimento de um arco de 30°, ou seja, $2 \cdot \frac{2\pi r}{12}$.



- Um arco de medida angular de 90° tem o triplo do comprimento de um arco de 30°, ou seja, $3 \cdot \frac{2\pi r}{12}$.



- Um arco de medida angular de 120° tem o quádruplo do comprimento de um arco de 30°, ou seja, $4 \cdot \frac{2\pi r}{12}$.



Em uma mesma circunferência, o comprimento de um arco em determinada unidade de medida é diretamente proporcional à sua medida angular (em grau).

Vamos considerar a seguinte terminologia:

- ℓ: comprimento de um arco da circunferência (medido em determinada unidade de comprimento);
- α: medida angular do mesmo arco em grau;
- r: raio da circunferência (medido na mesma unidade de comprimento de ℓ)

Podemos, então, montar o seguinte quadro:

Comprimento do arco	Medida angular do arco
$2\pi r$	360°
ℓ	α

Assim, temos a proporção: $\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360°}{\alpha}$

Veja os exemplos.

a) Vamos calcular o comprimento de um arco de 20° numa circunferência de 10 cm de raio.

Comprimento do arco (cm)	Medida do arco (grau)
$2\pi \cdot (10)$	360°
ℓ	20°

$$\frac{20\pi}{\ell} = \frac{360°}{20°}$$
$$\frac{10\pi}{\ell} = \frac{9}{1}$$
$$9\ell = 10\pi$$
$$\frac{9\ell}{9} = \frac{10\pi}{9}$$
$$\ell = \frac{10\pi}{9}$$
$$\ell \simeq \frac{10 \cdot 3{,}14}{9}$$
$$\ell \simeq 3{,}48 \text{ cm}$$

b) Vamos calcular a medida em graus de um arco de 6π cm numa circunferência de 15 cm de raio.

Comprimento do arco (cm)	Medida do arco (grau)
$2\pi \cdot (15)$	360°
6π	α

$$\frac{30\pi}{6\pi} = \frac{360°}{\alpha}$$
$$\frac{5}{2} = \frac{180°}{\alpha}$$
$$5\alpha = 360°$$
$$\frac{5\alpha}{5} = \frac{360°}{5}$$
$$\alpha = 72°$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

10 Uma circunferência tem 12 cm de raio. Calcule, em seu caderno, a medida aproximada, em centímetro, de um arco dessa circunferência correspondente a um ângulo central de 40°. 8,4 cm

11 Construa, em seu caderno, uma circunferência de 3 cm de raio. Trace dois diâmetros perpendiculares entre si. Quantos centímetros mede aproximadamente cada um dos quatro arcos em que a circunferência ficou dividida? 4,71 cm

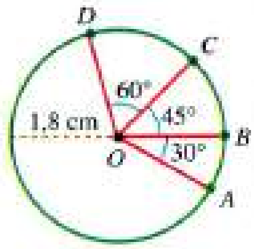
12 Uma circunferência é dividida em 12 arcos congruentes de medida 3π cm. Determine em seu caderno:

a) o comprimento da circunferência; 36π cm

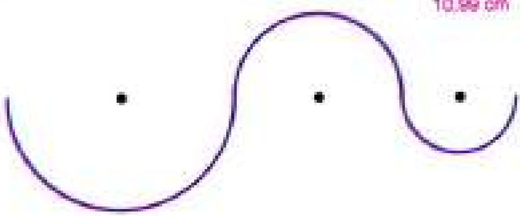
b) a medida do raio dessa circunferência. 18 cm

13 Calcule, no caderno, o comprimento aproximado dos arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{CD}$ da circunferência ao lado.

arco $\overset{\frown}{AB}$: 0,9 cm
arco $\overset{\frown}{BC}$: 1,4 cm
arco $\overset{\frown}{CD}$: 1,9 cm

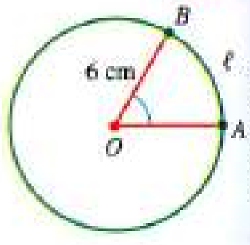


14 Em seu caderno, calcule, com o auxílio de uma régua, o comprimento aproximado da linha: 10,99 cm



15 Construa, em seu caderno, uma circunferência de 4 cm de raio. Trace um de seus diâmetros e apague metade da circunferência traçada. A figura obtida tem perímetro de quantos centímetros, aproximadamente? 12,56 cm

16 Na figura ao lado, temos que o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é de 6,28 cm. Em seu caderno, calcule a medida aproximada do ângulo $A\hat{O}B$. 60°



17 Calcule em grau a medida de um arco de circunferência de 9,42 cm, sabendo que o raio dessa circunferência tem 15 cm. 36°

18 Uma circunferência tem 18 cm de raio. Em seu caderno, calcule o comprimento aproximado do arco de 40° contido nessa circunferência. 12,56 cm

19 O pêndulo de um relógio de parede tem 30 cm de comprimento. A cada movimento, o pêndulo descreve um arco de 20°.
Determine, no caderno, o comprimento desse arco. 10,4 cm

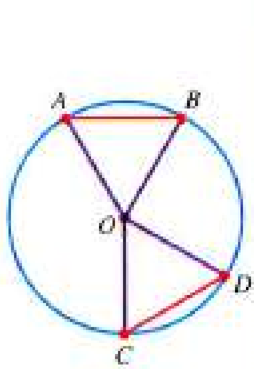
20 Calcule, em seu caderno, a medida em grau de um arco de 7,85 cm em uma circunferência de 10 cm de raio. 45°

3. Propriedades entre arcos e cordas de uma circunferência

1ª propriedade

Considere a figura ao lado, em que $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ são arcos congruentes de uma circunferência.

Vamos mostrar que as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ subentendidas por esses arcos são também congruentes.



Observe que:

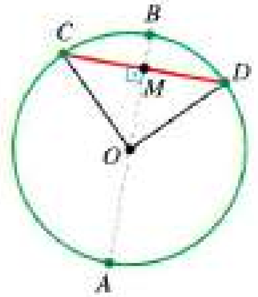
① $\overline{OA} \cong \overline{OD}$ (raios)
② $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$ ($\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$)
③ $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ (raios)

Logo: $\triangle AOB \cong \triangle COD$ (pelo caso L.A.L.)

Portanto, os lados correspondentes são congruentes, isto é, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Em toda circunferência, se dois arcos têm a mesma medida, então as cordas subentendidas por esses arcos são congruentes.

2ª propriedade



Considere a figura ao lado, em que o diâmetro $\overline{AB}$ é perpendicular à corda $\overline{CD}$.

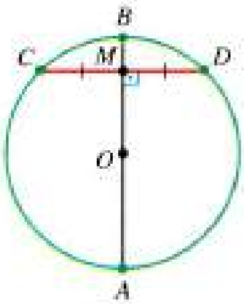
Observe que $\overline{OC} \cong \overline{OD}$ (raios) e, portanto, COD é um triângulo isósceles cuja altura é $\overline{OM}$.

Como em um triângulo isósceles a altura relativa à base coincide com a mediana, então M é ponto médio de $\overline{CD}$. Logo, $\overline{MC} \cong \overline{MD}$.

Com isso, mostramos que:

Em uma circunferência, todo diâmetro perpendicular a uma corda divide-a ao meio.

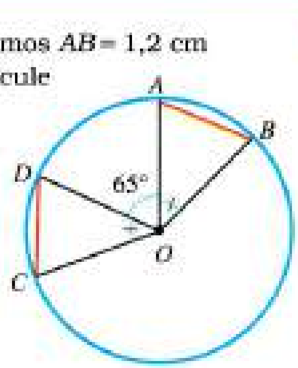
Também é verdadeiro que, se uma corda é cortada perpendicularmente ao meio por outra corda, então essa segunda corda é um diâmetro.



Se $\overline{CM} \cong \overline{MD}$ e $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, então $\overline{AB}$ é diâmetro.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

21 Na figura abaixo, temos $AB = 1{,}2$ cm e $m(A\hat{O}B) = 45°$. Calcule em seu caderno:



a) a medida da corda $\overline{CD}$; 1,2 cm

b) a medida do ângulo $B\hat{O}C$. 155°

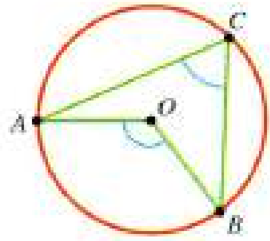
22 Considere um ponto P comum ao diâmetro $\overline{XY}$ de uma circunferência (de centro O) e a uma corda $\overline{AB}$. Determine, em seu caderno, o raio dessa circunferência, sabendo que $\overline{XY}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, $OP = 5$ cm e $AB = 24$ cm. 13 cm

23 Construa, em seu caderno, um triângulo ABC, em que $AB = 4$ cm, $BC = 3{,}6$ cm e $AC = 5$ cm. Trace uma circunferência que passe pelos vértices desse triângulo. construção de figura

24 Marque sobre uma folha de seu caderno três pontos: A, B e C, não alinhados. Trace o segmento $\overline{AB}$ e o segmento $\overline{BC}$. Trace a mediatriz de cada um desses segmentos. Chame de M o ponto de encontro dessas mediatrizes. Com centro em M e abertura $\overline{AM}$, trace uma circunferência. Qual é a posição dos pontos A, B e C em relação à circunferência? Estão situados sobre a circunferência.

25 Para confeccionar um chapéu de palhaço, Aline seguiu o modelo ao lado. Em seu caderno, determine a medida aproximada do arco de circunferência desse modelo. 55,8 cm

4. Triângulo retângulo inscrito em uma circunferência

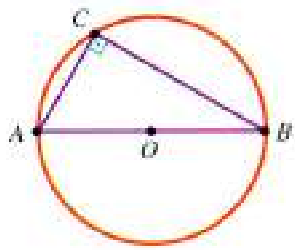


Considere a circunferência ao lado.

Nela, destacamos o ângulo inscrito $A\hat{C}B$, ou seja, um ângulo cujo vértice está sobre a circunferência.

Lembrando que um ângulo inscrito em uma circunferência tem por medida a metade do ângulo central correspondente e, portanto, a metade do arco compreendido por seus lados, temos:

$$m(A\hat{C}B) = \frac{m(A\hat{O}B)}{2} = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$$

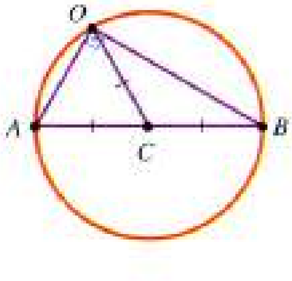


Nesta outra figura, vemos um triângulo em que um dos lados é um diâmetro da circunferência. Esse triângulo é retângulo, pois:

$$m(\hat{C}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$$

De modo geral, todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo e, reciprocamente, todo triângulo retângulo é inscritível em uma semicircunferência.

Observe agora, na figura abaixo, que a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é um raio da circunferência que o circunscreve.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

26 Determine, em seu caderno, a medida da mediana, relativa à hipotenusa, de um triângulo retângulo cujos catetos medem $\sqrt{20}$ cm e 4 cm. 3 cm

27 A mediana de um triângulo retângulo relativa à hipotenusa mede 4 cm, e um dos catetos mede $\sqrt{15}$ cm. Responda, no caderno, qual é a medida do outro cateto. 7 cm

28 A medida da mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede 12 cm. Calcule, em seu caderno, quantos centímetros tem o comprimento da circunferência que o circunscreve. 24π cm

29 Uma circunferência tem 10π cm de comprimento. Determine em seu caderno:

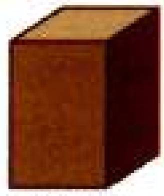
a) a medida do cateto maior de um triângulo retângulo inscrito nessa circunferência, sabendo que o menor cateto tem a mesma medida da mediana relativa à hipotenusa; $5\sqrt{3}$ cm

b) a área desse triângulo. $12{,}5\sqrt{3}$ cm²

Pense mais um pouco...

1. Deseja-se cortar, de um tronco de árvore de raio igual a 20 cm, uma coluna de base quadrada. Em seu caderno, determine a medida máxima do lado da base que se pode obter. $20\sqrt{2}$ cm
2. Calcule a área da base quadrada da coluna em centímetro quadrado. 800 cm²

tronco de árvore


coluna de base quadrada

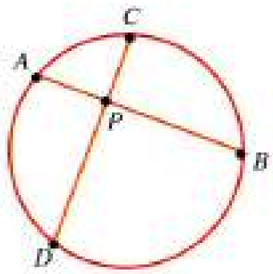
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

5. Relações métricas em uma circunferência

1ª relação

Considerando a figura ao lado, vamos demonstrar que:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

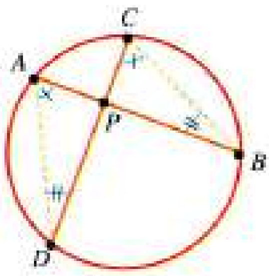


NELSON MATSUDA

Traçando os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$, obtemos os triângulos APD e CPB.

Nos triângulos APD e CPB, temos:

$$\left.\begin{array}{l} m(\hat{A}) = m(\hat{C}) = \dfrac{m(\widehat{BD})}{2} \\ m(\hat{D}) = m(\hat{B}) = \dfrac{m(\widehat{AC})}{2} \end{array}\right\} \text{Logo: } \triangle APD \sim \triangle CPB \text{ (pelo caso A.A.)}$$



NELSON MATSUDA

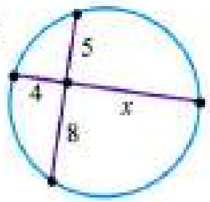
Portanto: $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PD}{PB}$, ou seja, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Se duas cordas se cortam em um ponto interior a uma circunferência, então o produto das medidas dos dois segmentos de uma delas é igual ao produto das medidas dos segmentos da outra.

Como exemplo, vamos calcular o valor de x nas figuras:

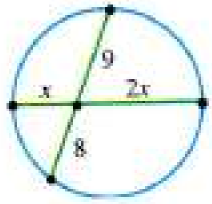
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

a)



$$4 \cdot x = 8 \cdot 5$$
$$4x = 40$$
$$x = \frac{40}{4}$$
$$x = 10$$

b)



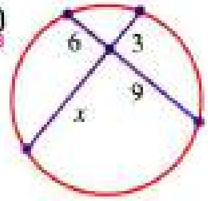
$$2x \cdot x = 8 \cdot 9$$
$$2x^2 = 72$$
$$x^2 = \frac{72}{2}$$
$$x^2 = 36 \ (x > 0)$$
$$x = \sqrt{36}$$
$$x = 6$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

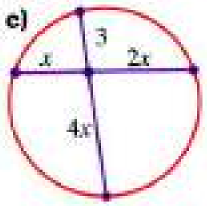
30 Calcule, no caderno, o valor de x nas figuras abaixo.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

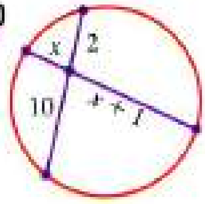
a) $x = 18$



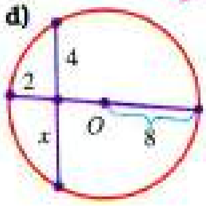
c) $x = 6$



b) $x = 4$

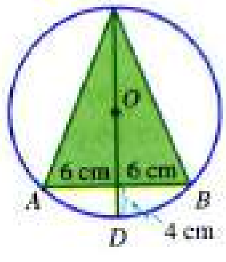


d) $x = 7$

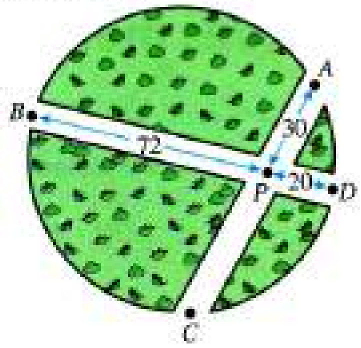


31 Determine, em seu caderno, a área do $\triangle ABC$ ao lado. 54 cm²

NELSON MATSUDA



32 Uma praça circular é cortada por duas ruas, como mostra a figura abaixo. Para ir de A até P, Rita dá 30 passos. Luísa dá 72 passos para ir de B a P e 20 passos para ir de P a D. Calcule no caderno, quantos passos Rita deve dar para chegar até C, admitindo-se que os passos das duas garotas tenham mesmo comprimento. 48 passos



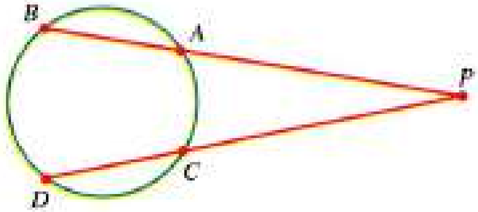
NELSON MATSUDA

33 Uma corda de 6 cm corta perpendicularmente um diâmetro a 4 cm do centro de uma circunferência. Em seu caderno, calcule a área do círculo determinada por essa circunferência. 25π cm²

2ª relação

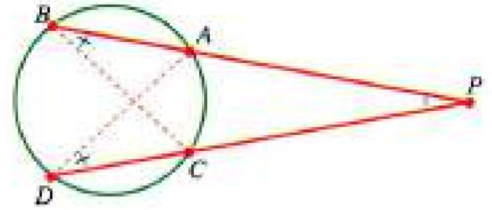
Considerando a figura ao lado, vamos provar que:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



NELSON MATSUDA

Traçando os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ obtemos os triângulos *PAD* e *PCB*.



Nos triângulos *PAD* e *PCB* temos:

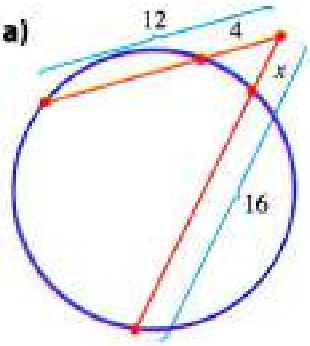
$$\left.\begin{array}{l} m(\hat{D}) = m(\hat{B}) = \dfrac{m(\widehat{AC})}{2} \\ \hat{P} \cong \hat{P} \text{ (ângulo comum)} \end{array}\right\} \text{Logo: } \triangle PAD \sim \triangle PCB \text{ (pelo caso A.A.)}$$

Portanto: $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PD}{PB}$, ou seja, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Se, de um ponto exterior a uma circunferência, traçamos dois segmentos secantes, então o produto das medidas de um segmento secante e de sua parte externa é igual ao produto das medidas do outro segmento secante e de sua parte externa.

Como exemplo, vamos calcular o valor de *x* nas figuras:

a)



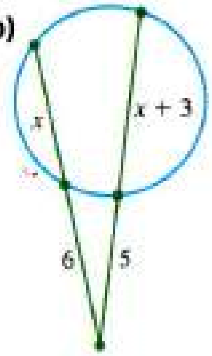
$16 \cdot x = 4 \cdot 12$

$16x = 48$

$x = \dfrac{48}{16}$

$x = 3$

b)



$6 \cdot (6 + x) = 5 \cdot (x + 8)$

$36 + 6x = 5x + 40$

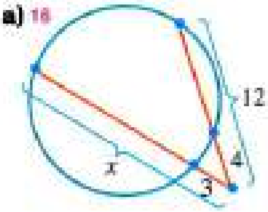
$6x - 5x = 40 - 36$

$x = 4$

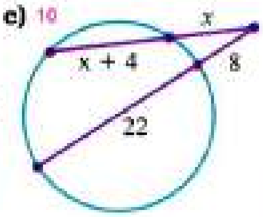
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

34 Calcule o valor de *x* nas figuras seguintes.

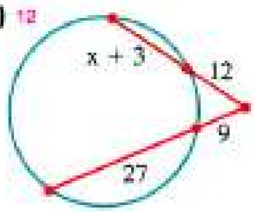
a) 16



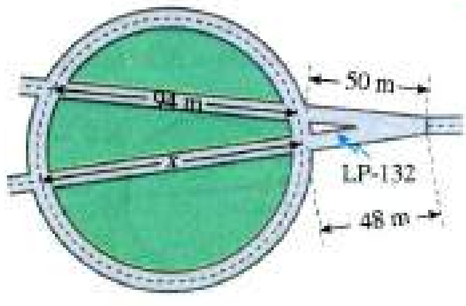
c) 10



b) 12



35 O canteiro circular de uma rotatória é cortado por duas estradas, como mostra a figura a seguir. O comprimento da parte da estrada LP-132 que corta o canteiro está indicado por *x*. Em seu caderno, calcule o valor de *x*. 102 m

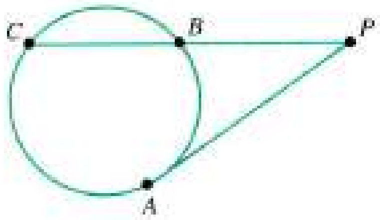


3ª relação

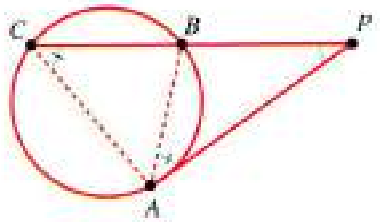
Na figura ao lado, $\overline{PA}$ é tangente à circunferência.

Vamos provar que:

$$(PA)^2 = PC \cdot PB$$



Traçando os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, obtemos os triângulos PBA e PAC.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Nos triângulos PBA e PAC, temos:

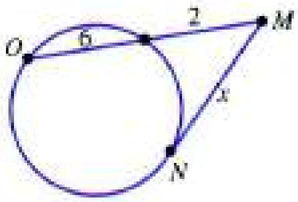
$$\left.\begin{array}{l} m(\hat{C}) = m(\hat{A}) = \dfrac{m(\widehat{AB})}{2} \\ \hat{P} \cong \hat{P} \text{ (ângulo comum)} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Logo: } \triangle PBA \sim \triangle PAC \\ \text{(pelo caso A.A.)}\end{array}$$

Portanto: $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PB}{PA}$, ou seja, $(PA)^2 = PB \cdot PC$

Se, de um ponto exterior a uma circunferência, traçamos um segmento tangente e um segmento secante a esta circunferência, então a medida do segmento tangente é a média proporcional entre as medidas do segmento secante e de sua parte externa.

Como exemplo, vamos calcular o valor de x nas figuras sabendo que $\overline{MN}$ é tangente à circunferência:

a)



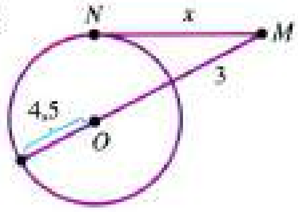
$x^2 = 8 \cdot 2$

$x^2 = 16$

$x = \sqrt{16}$

$x = 4$

b)



$x^2 = 12 \cdot 3$

$x^2 = 36$

$x = \sqrt{36}$

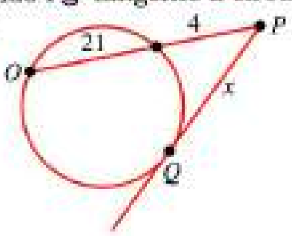
$x = 6$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

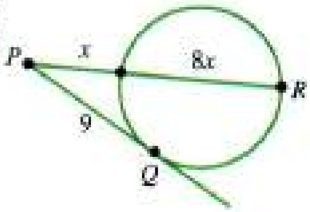
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

36 Calcule, no caderno, o valor de x nas figuras, sendo $\overline{PQ}$ tangente à circunferência.

a) 10

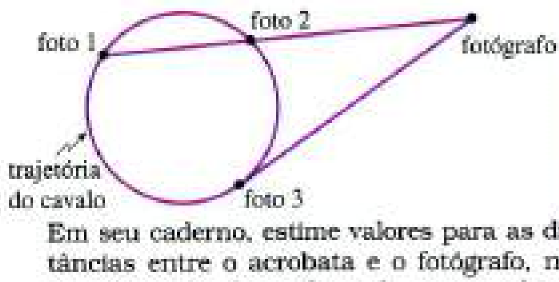


b) 3



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

37 Um fotógrafo assistia a uma apresentação circense na qual um acrobata mantinha-se em pé sobre as costas de um cavalo, que descrevia um movimento circular sobre o picadeiro. Em três momentos distintos, o fotógrafo tirou fotos conforme o esquema abaixo:



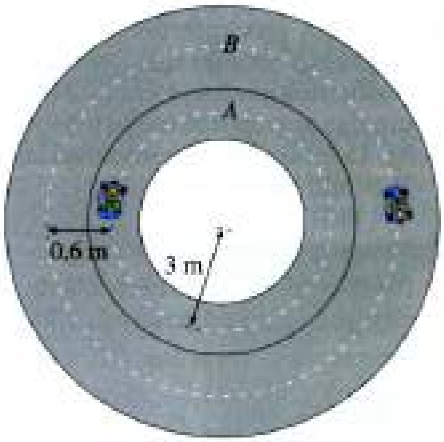
NELSON MATSUDA

Em seu caderno, estime valores para as distâncias entre o acrobata e o fotógrafo, nos momentos das fotos, de modo que atendam à 3ª relação estudada. resposta pessoal

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

38 No centro de um jardim retangular, com 45 m × 32 m, foi construída uma fonte circular cujo raio é igual a $\frac{2}{9}$ do comprimento do maior lado do jardim. Determine, no caderno, o comprimento da circunferência dessa fonte. 62,8 m

39 Um autorama circular tem duas pistas, *A* e *B*, conforme esquema abaixo.



Calcule e responda no caderno.

a) Depois que o carro da pista *A* der 36 voltas, quantos metros terá andado? 678,24 m

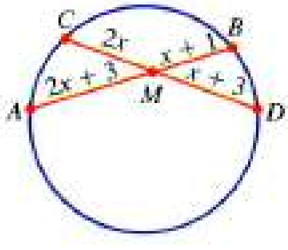
b) Quantos metros terá andado o carro da pista *B* depois de dar 24 voltas? 542,592 m

40 Um avião contorna o Polo Norte em um dia, seguindo a trajetória do Círculo Polar Ártico, cujo comprimento é 2.492 km. Qual é a velocidade do avião? 103,8 km/h

41 Um ciclista, em uma pista circular de 24 m de raio, dá 15 voltas em 160 segundos. Responda, no caderno, qual é a sua velocidade média? 14,13 m/s

42 Faça os cálculos em seu caderno.

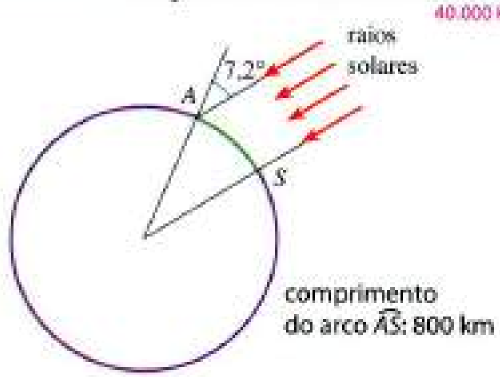
(Unifor-CE) Uma circunferência e duas de suas cordas, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, concorrem no ponto *M*:



Se as medidas dos segmentos $\overline{CM}$, $\overline{MD}$, $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são dadas em centímetro, a corda $\overline{AB}$ mede, em centímetro: alternativa e

a) 36 **b)** 18 **c)** 15 **d)** 14 **e)** 13

43 (Unicamp-SP) Para calcular a circunferência terrestre, o sábio Eratóstenes valeu-se da distância conhecida de 800 km entre as localidades de Alexandria e Siena no Egito (*A* e *S*, respectivamente), situadas no mesmo meridiano terrestre. Ele sabia que, quando em Siena, os raios solares caíam verticalmente, em Alexandria eles faziam um ângulo de 7,2° com a vertical. Calcule, em seu caderno, com esses dados, a circunferência terrestre, isto é, o comprimento de uma volta completa em torno da Terra. 40.000 km



44 Construa, em seu caderno, uma circunferência de raio 3 cm. Por um ponto *P* exterior a ela, trace um segmento tangente e um segmento secante que passe pelo centro da circunferência. A parte do segmento secante que fica externa à circunferência mede 5 cm. Quanto mede o segmento tangente? $\sqrt{55}$ cm

45 Resolva no caderno.

(USF-SP) Na circunferência abaixo, de centro *O* e raio $r = 4$, a corda $\overline{CD}$ corta o diâmetro $\overline{AB}$ no ponto *P* de tal forma que *P* é o ponto médio do raio $\overline{OA}$ e $PC = 2 \cdot PD$.

Então: alternativa b

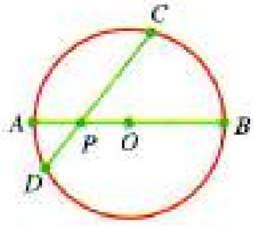
a) $CD = 2\sqrt{6}$

b) $CD = 3\sqrt{6}$

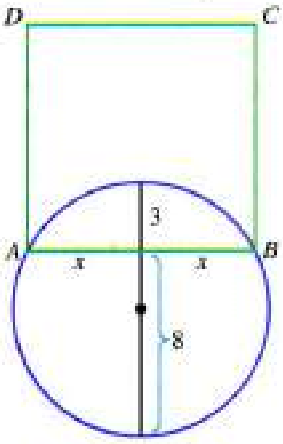
c) $CD = 6\sqrt{6}$

d) $CD = \sqrt{6}$

e) $CD = 6$

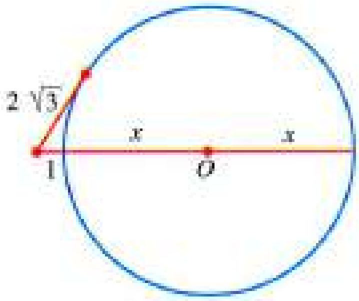


46 Considerando a figura abaixo, determine, em seu caderno, a área do quadrado $ABCD$. 96



NELSON MATSUDA

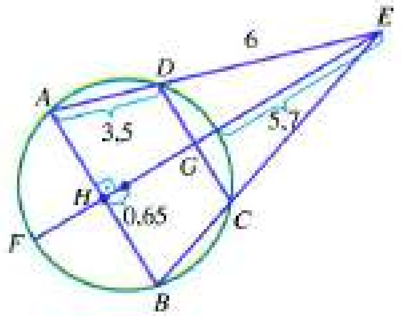
47 Calcule, em seu caderno, o comprimento da circunferência: $C = 11\pi$



NELSON MATSUDA

48 Construa, em seu caderno, uma circunferência de 12 cm de diâmetro e trace um diâmetro $\overline{AB}$. Marque sobre ele, distante 11 cm de A, um ponto M. Levante, por esse ponto, uma perpendicular que cruze a circunferência em um ponto P. O segmento $\overline{PM}$ é a representação geométrica de qual número? $\sqrt{11}$

49 Determine, no caderno, a medida da altura $\overline{EH}$ do triângulo ABE na figura abaixo. 8,5

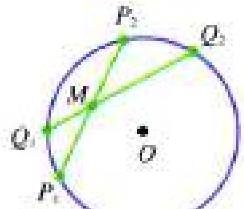


NELSON MATSUDA

50 Em uma circunferência, duas cordas se cruzam de modo que, em uma delas, os segmentos medem 4 cm e 32 cm e, na outra, um dos segmentos mede o dobro do primeiro. Calcule, em seu caderno, a medida do segundo segmento. 24 cm

51 Faça os cálculos no caderno.

(Unifor-CE) A circunferência da figura abaixo tem centro no ponto O, e M é o ponto de interseção das cordas $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{Q_1Q_2}$.



NELSON MATSUDA

Se $P_1M = 4$ cm, $MP_2 = (k + 1)$ cm, $Q_1M = 3$ cm e $MQ_2 = (3k - 7)$ cm, então a corda Q_1Q_2, em cm, mede: alternativa c

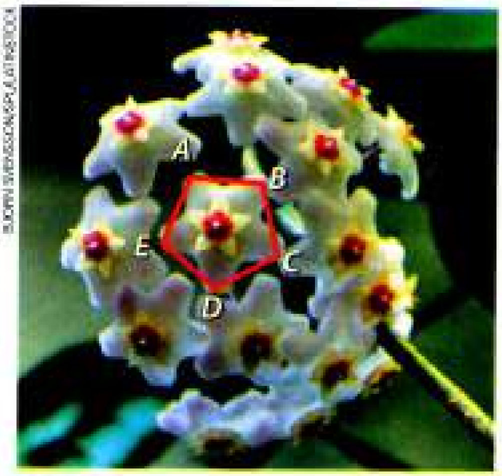
a) 5 **b)** 8 **c)** 11 **d)** 14

CAPÍTULO

9 Polígonos regulares e áreas

1. Polígonos regulares

Na natureza, podemos encontrar muitas formas que lembram polígonos regulares. Veja, por exemplo, o pentágono regular destacado nesta bela flor que se chama flor-de-cera:



No pentágono regular $ABCDE$, destacado na foto, temos:

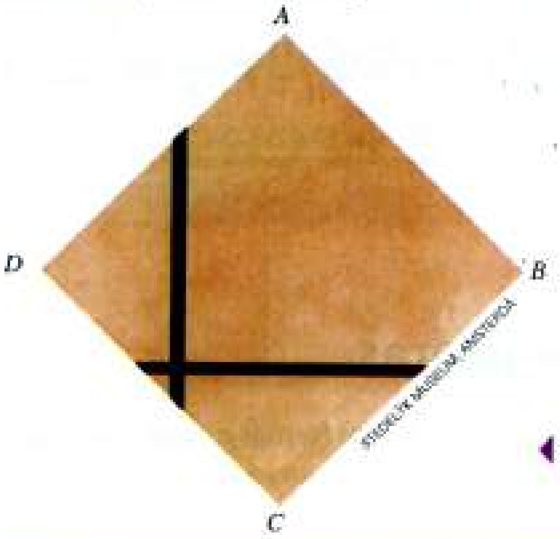
- $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EA}$
- $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \cong \hat{E}$

O alvéolo de um favo de mel também nos faz lembrar um polígono que é o hexágono regular.

No hexágono regular $ABCDEF$, destacado na foto, temos:

- $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FA}$
- $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \cong \hat{E} \cong \hat{F}$

Os polígonos regulares são também muito usados nas artes plásticas, especialmente em obras de algumas das tendências modernistas. Veja abaixo o quadro do pintor construtivista Piet Mondrian (1872-1944), cuja forma lembra um quadrado.



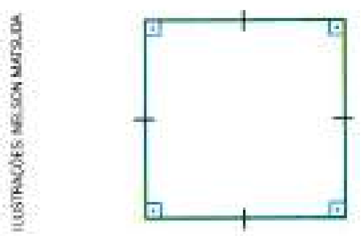
No quadrado $ABCD$, destacado na tela, temos:

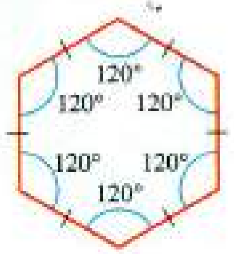
- $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$
- $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D}$

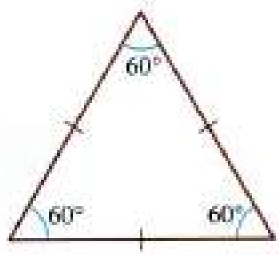
Composição com dois traços, *de Piet Mondrian*, 1931. *Óleo sobre tela, 114 cm na diagonal.*

Um polígono é regular quando todos os seus lados são congruentes entre si e todos os seus ângulos são congruentes entre si.

Exemplos:



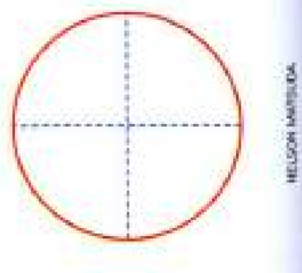




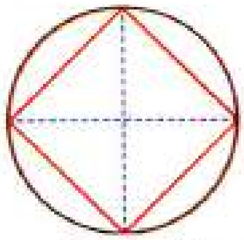
Propriedades dos polígonos regulares

- Se uma circunferência é dividida em três ou mais arcos congruentes, então as cordas determinadas pelos pontos consecutivos de divisão formam um polígono regular **inscrito** na circunferência.
- Se uma circunferência é dividida em três ou mais arcos congruentes, então as tangentes aos pontos consecutivos de divisão formam um polígono regular **circunscrito** à circunferência.

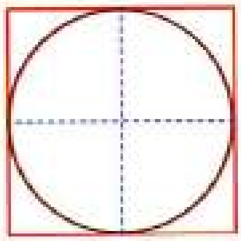
Na circunferência ao lado, traçamos dois diâmetros perpendiculares entre si. A circunferência ficou dividida em quatro arcos congruentes.



- As cordas determinadas pelos pontos consecutivos de divisão formam um quadrado inscrito na circunferência:

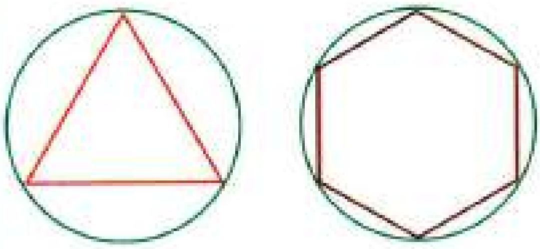


- As tangentes determinadas pelos pontos de divisão formam um quadrado circunscrito à circunferência:

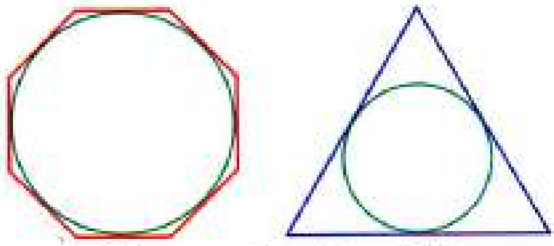


Podemos dizer que, se um polígono é regular, então existe uma circunferência que passa por todos os seus vértices e outra que tangencia todos os seus lados.

- Todo polígono regular é inscritível em uma circunferência.
- Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência.



Polígonos regulares inscritos



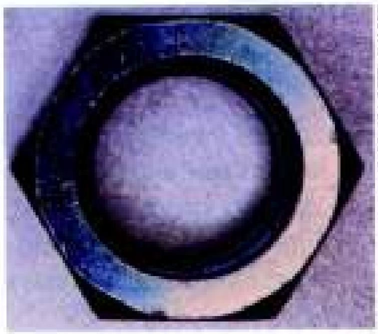
Polígonos regulares circunscritos

Veja, como exemplo, algumas situações do cotidiano:

Situação 1

A moeda de 25 centavos, cunhada em 1995, tem ao fundo o desenho de um heptágono regular. Essa situação sugere um polígono cujos vértices estão sobre uma circunferência. Nesse caso, dizemos que o polígono está **inscrito na circunferência**.

Situação 2



A porca ao lado tem uma parte com forma circular e outra com forma de um hexágono regular. Essa situação sugere um polígono cujos lados são tangentes a uma circunferência. Dizemos, nesse caso, que o polígono está **circunscrito à circunferência**.

Situação 3

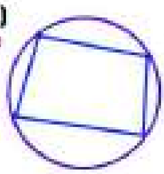
O CD da foto ao lado também tem forma circular. Sua embalagem lembra a forma de um quadrado. Essa situação também sugere um polígono circunscrito a uma circunferência.


PHOTODISC/GETTY IMAGES

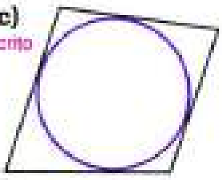
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Indique, em seu caderno, se o polígono é inscrito na circunferência, circunscrito a ela ou nenhum dos casos:

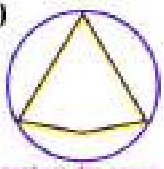
a) inscrito



c) circunscrito

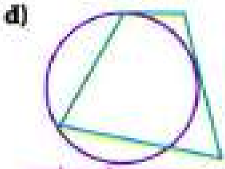


b)



nenhum dos casos

d)

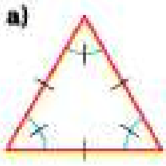


nenhum dos casos

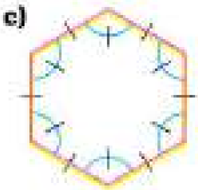
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

2 Indique no caderno os itens que não apresentam polígonos regulares. Depois justifique.

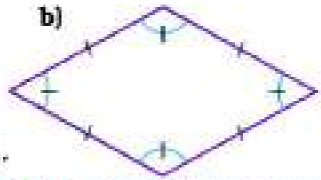
a)



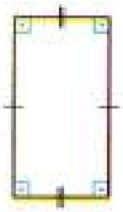
c)



b)



d)



b: Não tem todos os ângulos congruentes.
d: Não tem todos os lados congruentes.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

PARA SABER mais

A Matemática na História

Muitos matemáticos gregos da Antiguidade preocuparam-se com medidas de comprimento e de área, destacadamente Arquimedes.

Arquimedes foi um dos maiores matemáticos da Antiguidade, embora o centro da Matemática no período em que viveu, chamado de Idade Helenística, estivesse em Alexandria (no Egito).

Esse sábio — mistura de matemático, físico e inventor — nasceu no início do século III a.C., em Siracusa (cidade localizada na atual ilha da Sicília, na Itália), e morreu em 212 a.C., durante um ataque dos romanos à cidade.

Sempre muito engenhoso, mesmo durante o cerco à cidade pelas tropas romanas, Arquimedes inventou catapultas para lançar pedras, assim como polias e ganchos para espatifar navios romanos. Com essas e outras invenções, Arquimedes conseguiu manter o inimigo distante por, pelo menos, três anos. Contudo, durante o massacre que sucedeu à tomada de Siracusa, foi assassinado por um soldado romano, apesar das ordens expressas do general Marcelo para que preservassem a vida do grande sábio.

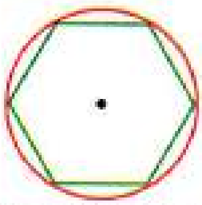
CHRIS HELLIER/CORBIS-STOCK PHOTOS

Catapulta.

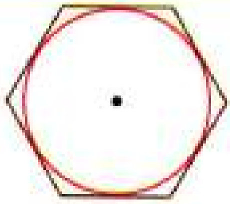
JOSÉ LUIS JUHAS

Entre as obras escritas por esse matemático grego, aproximadamente dez tratados foram preservados até hoje. No que diz respeito à medida de comprimentos e de áreas, interessa-nos um tratado em geometria plana denominado *A medida do círculo*, no qual Arquimedes faz uma aproximação para a medida do comprimento da circunferência, estabelecendo, ainda pela primeira vez, um método para o cálculo do **número irracional** hoje denominado π, que é a razão entre o comprimento e a medida do diâmetro da circunferência.

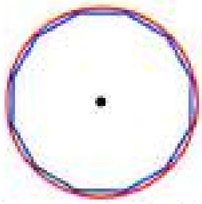
O comprimento da circunferência fica entre o perímetro de qualquer polígono regular inscrito e qualquer polígono regular circunscrito, como mostram as figuras abaixo.



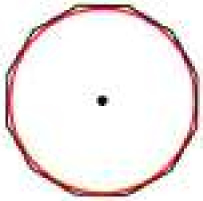
Hexágono regular inscrito (6 lados)



Hexágono regular circunscrito (6 lados)



Dodecágono regular inscrito (12 lados)



Dodecágono regular circunscrito (12 lados)

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Para obter a medida da circunferência, Arquimedes tomou um círculo de raio 1.

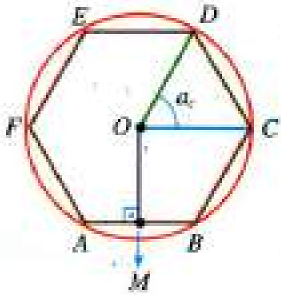
Uma vez que ele sabia como calcular o perímetro dos hexágonos regulares, assim como obter os polígonos inscrito e circunscrito com o dobro do número de lados, ele calculou o perímetro dos polígonos inscrito e circunscrito de 12, 24, 48 e 96 lados, obtendo resultados que se aproximavam cada vez mais de 2π.

Foi assim que Arquimedes obteve a primeira aproximação historicamente conhecida para o comprimento da circunferência, bem como para o número π. Ele chegou à conclusão de que π era um número entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$, que são, respectivamente, 3,140... e 3,142..., ou seja, Arquimedes obteve uma aproximação para π com duas casas. Esse método é conhecido como **método clássico** para o cálculo de π.

Elementos de um polígono regular

Destacar que o apótema do polígono é o raio da circunferência inscrita nele.

Em um polígono regular temos:

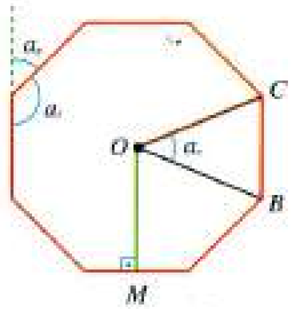


NELSON MATSUDA

- **centro do polígono** – centro da circunferência circunscrita a ele (ponto O);
- **raio do polígono** – raio da circunferência circunscrita a ele ($\overline{OC}$);
- **apótema do polígono** – segmento que une o centro do polígono ao ponto médio de um de seus lados ($\overline{OM}$);
- **ângulo central** – aquele cujo vértice é o centro do polígono e cujos lados são semirretas que contêm dois vértices consecutivos do polígono ($C\hat{O}D$).

A medida do ângulo central é dada por: $a_c = \dfrac{360°}{n}$ (n = número de lados)

Considere o octógono regular abaixo.



NELSON MATSUDA

JOSÉ LUIS JUHAS

- O centro do octógono é o ponto O.
- Os segmentos $\overline{OC}$ e $\overline{OB}$ são raios do octógono.
- Um dos apótemas do octógono é o segmento $\overline{OM}$.
- O ângulo $C\hat{O}B$ é um ângulo central, que mede:

$$a_c = \frac{360°}{8} = 45°$$

- A medida a_i de um ângulo interno desse polígono é dada por:

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = \frac{(8-2)\cdot 180°}{8} = 135°$$

(Recorde que S_i, a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono qualquer, vale $(n-2)\cdot 180$, em que n é o número de lados.)

- A medida a_e de um ângulo externo desse polígono é dada por: $a_i + a_e = 180°$
Então: $135° + a_e = 180°$, ou seja, $a_e = 45°$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

3 Calcule, em seu caderno, a medida do ângulo central de um triângulo equilátero. 120°

4 Responda no caderno: quanto medem o ângulo central, o ângulo interno e o ângulo externo de um quadrilátero regular? $a_c = 90°$; $a_i = 90°$; $a_e = 90°$

5 Um polígono regular tem 20 lados. Responda em seu caderno:

a) Quanto mede seu ângulo central? 18°

b) Quanto mede seu ângulo interno? E seu ângulo externo? 162°; 18°

6 A figura central do tampo de uma mesa foi formada a partir de um dodecágono regular, como vemos na figura abaixo. Determine, em seu caderno, a medida do ângulo central desse dodecágono. 30°

NELSON MATSUDA

7 Responda, em seu caderno, quantos lados tem um polígono regular em que:

a) o ângulo interno mede 144°. 10

b) o ângulo externo mede 30°. 12

c) o ângulo central mede 10°. 36

8 A figura a seguir é um selo comemorativo dos 50 anos de fundação de certo colégio.

NELSON MATSUDA

Sabendo que o hexágono desenhado nesse selo é regular, determine, em seu caderno, as medidas do ângulo central, do ângulo externo e do ângulo interno. 60°, 60°, 120°

9 A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 3.240°.

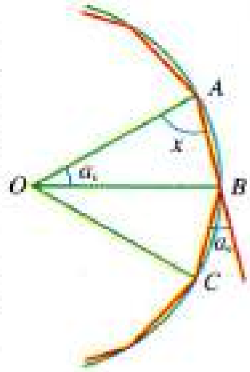
Determine em seu caderno:

a) a medida do ângulo central desse polígono; $a_c = 18°$

b) a medida do ângulo externo desse polígono. $a_e = 18°$

10 Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

Copiem no caderno a figura ao lado. Nela temos parte de um polígono de n lados e de uma circunferência de centro O circunscrita a esse polígono.



NELSON MATSUDA

Indicamos por a_c, a_e e x as medidas dos ângulos central, externo e $O\hat{A}B$, respectivamente.

a) Classifiquem, quanto aos lados, os triângulos OAB e OBC. Esses triângulos são congruentes? isósceles, isósceles, sim

b) Representem, em função de x, as medidas do ângulo $O\hat{B}A$ e do ângulo central. x, $180° - 2x$

c) Representem, em função de x, as medidas do ângulo $A\hat{B}C$ e do ângulo externo. $2x$, $180° - 2x$

d) Qual é a relação entre as medidas do ângulo central e do ângulo externo? São iguais.

11 Ainda reunido com um colega, façam o que se pede.

Cada um deve traçar no caderno duas circunferências de raio 4 cm e escolher um polígono regular com n lados, $n > 6$, para ser construído pelo outro, de duas maneiras.

(I) Traçam-se n ângulos centrais adjacentes de medida $\frac{360°}{n}$ cujos lados determinam, na circunferência, os n vértices do polígono. Em seguida, traçam-se os lados do polígono.

(II) Traça-se um só ângulo central de medida $\frac{360°}{n}$ determinando, na circunferência, os vértices A e B. Usando um compasso com abertura igual a AB, marcam-se na circunferência, a partir de B, os demais vértices. Em seguida, traçam-se os lados do polígono.

Depois de cada um construir o polígono das duas maneiras, discutam e escolham qual delas é a melhor. Justifiquem a escolha. construção de figura; respostas pessoais

2. Relações métricas nos polígonos regulares

A seguir, estudaremos como calcular a medida do lado e a medida do apótema de um polígono regular inscrito em uma circunferência, em função da medida do raio.

Quadrado inscrito

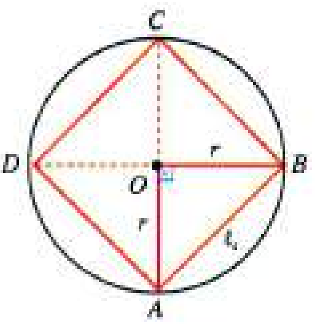
Considere uma circunferência de centro O e raio de medida r.

Para construir um quadrado $ABCD$ inscrito nessa circunferência, podemos traçar dois diâmetros perpendiculares entre si ($\overline{AC}$ e $\overline{BD}$), determinando os vértices do quadrado.

Vamos calcular a medida do lado e do apótema desse quadrado em função de r.

Cálculo da medida do lado (ℓ_4)

No $\triangle AOB$, pelo teorema de Pitágoras, temos:



$$(AB)^2 = (AO)^2 + (OB)^2$$

$$\ell_4^2 = r^2 + r^2$$

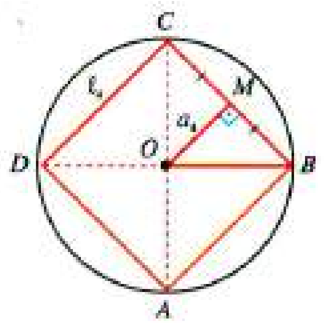
$$\ell_4^2 = 2r^2$$

$$\ell_4 = \sqrt{2r^2} \quad (r > 0)$$

$$\boxed{\ell_4 = r\sqrt{2}}$$

Cálculo da medida do apótema (a_4)

No $\triangle OMB$, pelo teorema de Pitágoras, temos:



$$(OM)^2 + (BM)^2 = (OB)^2$$

$$a_4^2 + \left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 = r^2$$

$$a_4^2 + \frac{2r^2}{4} = r^2$$

$$a_4^2 = r^2 - \frac{2r^2}{4} = \frac{2r^2}{4}$$

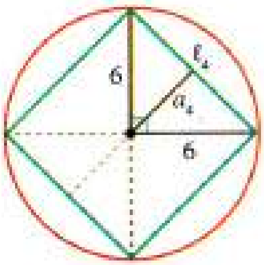
$$a_4 = \sqrt{\frac{2r^2}{4}} \qquad (r > 0)$$

$$\boxed{a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$$

Acompanhe os exemplos a seguir.

a) Calcular as medidas do lado e do apótema de um quadrado inscrito em uma circunferência de 6 cm de raio.

Fazemos a figura.



Pelo teorema de Pitágoras:

$\ell_4^2 = 6^2 + 6^2$ $\qquad a_4 = \dfrac{\ell_4}{2}$

$\ell_4^2 = 72$ $\qquad a_4 = \dfrac{6\sqrt{2}}{2}$

$\ell_4 = \sqrt{72}$ $\qquad a_4 = 3\sqrt{2}$

$\ell_4 = 6\sqrt{2}$

Outra maneira de resolver:

Temos: $r = 6$ cm

$\ell_4 = r\sqrt{2}$ $\qquad a_4 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$

$\downarrow$

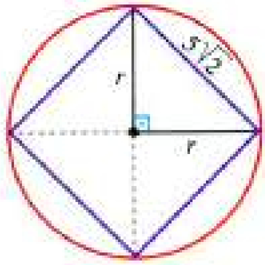
$\ell_4 = 6\sqrt{2}$ $\qquad a_4 = \dfrac{6\sqrt{2}}{2}$

$a_4 = 3\sqrt{2}$

Portanto, $\ell_4 = 6\sqrt{2}$ cm e $a_4 = 3\sqrt{2}$ cm.

b) Calcular a medida do raio de uma circunferência na qual é inscrito um quadrado cujo lado mede $5\sqrt{2}$ cm.

Fazemos a figura.



Pelo teorema de Pitágoras:

$r^2 + r^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2$

$2r^2 = 25 \cdot 2$

$r^2 = 25$

$r = \sqrt{25}$

$r = 5$

Outra maneira de resolver:

Temos: $\ell_4 = 5\sqrt{2}$ cm

$\ell_4 = r\sqrt{2}$

$5\sqrt{2} = r\sqrt{2}$

$\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{r\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$r = 5$

Então, $r = 5$ cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12 No caderno, construa um quadrado inscrito em uma circunferência de 3 cm de raio.

a) Que número irracional representa a medida do lado desse quadrado? A representação decimal desse número tem infinitas casas decimais e não é periódica. Determine essa representação decimal com uma casa decimal. $3\sqrt{2} \approx 4{,}2$

b) Que número irracional representa a medida do apótema? $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

13 O apótema de um quadrado inscrito em uma circunferência mede $6\sqrt{2}$ cm.
Calcule, em seu caderno, a medida da diagonal desse quadrado. 24 cm

14 O lado de um quadrado circunscrito a uma circunferência mede 8 cm. $\ell_4 = 4\sqrt{2}$ cm

a) Calcule, em seu caderno, a medida do lado de um quadrado inscrito nessa circunferência.

b) Calcule a medida da diagonal do quadrado inscrito nessa circunferência. 8 cm

15 A diagonal de um quadrado mede $5\sqrt{2}$ cm. Calcule, em seu caderno, a distância do centro desse quadrado a um de seus lados (medida do apótema). 2,5 cm

16 Uma fábrica de chocolate lançou no mercado uma caixa de bombons decorada. O desenho da tampa da caixa foi elaborado a partir de dois quadrados, como se vê na figura ao lado.

Sabe-se que a medida do lado do quadrado menor é 10 cm. Sabe-se também que os vértices do quadrado menor são os pontos médios dos lados do quadrado maior. Nessas condições, determine no caderno: $10\sqrt{2}$ cm

a) a medida do lado do quadrado maior;

b) o comprimento da faixa vermelha que cobre os lados dos dois quadrados; $(40 + 40\sqrt{2})$ cm

c) a área da parte superior da tampa da caixa. 100π cm²

17 Construa um quadrado circunscrito e um quadrado inscrito em uma mesma circunferência. Determine a diferença entre os perímetros desses quadrados em função da medida r do raio da circunferência. $(8 - 4\sqrt{2})r$

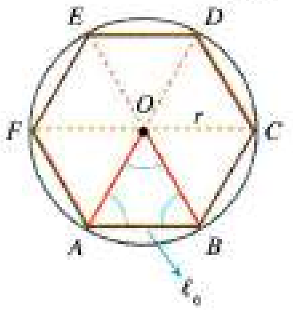
Hexágono regular inscrito

Considere uma circunferência de centro O e raio de medida r.

Como o ângulo central do hexágono regular mede $\frac{360°}{6} = 60°$, podemos construir na circunferência um ângulo central com esse valor, obtendo um arco $\widehat{AB}$. Com a abertura do compasso igual a AB, marcamos os outros vértices do hexágono.

Vamos calcular a medida do lado e do apótema desse hexágono em função de r.

Cálculo da medida do lado (ℓ_6)



Temos: $m(A\hat{O}B) = 60°$

$$m(A\hat{B}O) = \frac{m(\widehat{AE})}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

$$m(B\hat{A}O) = \frac{m(\widehat{BD})}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

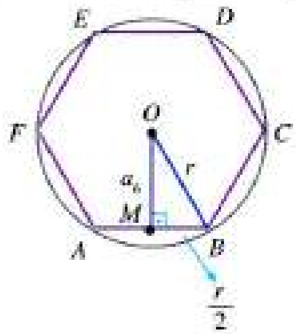
O $\triangle AOB$, sendo equiângulo, é também equilátero, ou seja:

$$AB = OA = OB$$

$$\ell_6 = r$$

Logo: $\boxed{\ell_6 = r}$

Cálculo da medida do apótema (a_6)



No $\triangle OMB$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(OM)^2 + (MB)^2 = (OB)^2$$

$$a_6^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2$$

$$a_6^2 + \frac{r^2}{4} = r^2$$

$$a_6^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}$$

$$a_6^2 = \frac{3r^2}{4}$$

$$a_6 = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} \quad (r > 0)$$

$$\boxed{a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}}$$

O fato de a medida do lado do hexágono regular ser igual a r permite que marquemos os vértices do hexágono, na circunferência, tomando a abertura do compasso igual a r.

Veja os exemplos a seguir.

a) Calcular a medida do raio de uma circunferência na qual o apótema do hexágono regular inscrito mede $12\sqrt{3}$ cm.

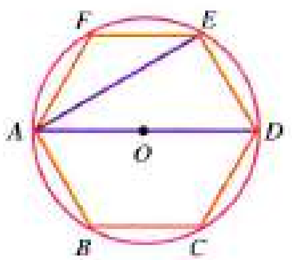
$a_6 = 12\sqrt{3}$ cm.

$\dfrac{r\cancel{\sqrt{3}}}{2} = 12\cancel{\sqrt{3}}$,

$r = 24$

Portanto, o raio mede 24 cm.

b) Encontrar o perímetro do hexágono regular cuja medida da diagonal $\overline{AE}$ é $10\sqrt{3}$ cm.



$ED = r$

$AD = 2r$

$AE = 10\sqrt{3}$ cm

$\triangle ADE$ é retângulo.

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ADE$, temos:

$(AE)^2 + (ED)^2 = (AD)^2$

$\left(10\sqrt{3}\right)^2 + r^2 = (2r)^2$

$300 = 4r^2 - r^2$

$300 = 3r^2$

$r^2 = 100 \quad (r > 0)$

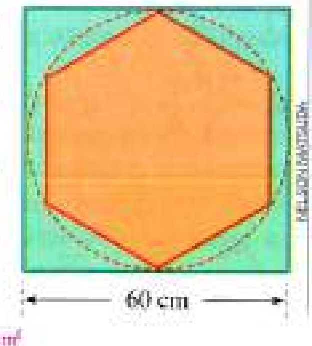
$r = 10$ cm

Assim: $\ell_6 = 10$ cm

Portanto, o perímetro é 60 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

18 Marina é projetista em uma fábrica de lustres. Ela criou um lustre formado por 4 placas quadradas de polipropileno translúcido (um tipo de plástico que deixa passar a luz), com 60 cm de lado cada uma. A figura central dessas placas é um polígono regular, desenhado a partir de uma circunferência tangente aos lados das placas. Determine a medida do lado e a área desse polígono.



lado: 30 cm; área: $1.350\sqrt{3}$ cm²

19 Um hexágono regular é inscrito em uma circunferência de 3,2 cm de raio. Calcule em seu caderno:

a) a medida dos lados desse hexágono. 3,2 cm

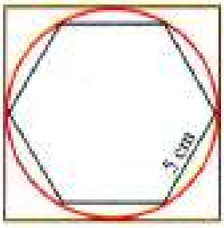
b) o perímetro desse hexágono; 19,2 cm

c) a medida do apótema. $1,6\sqrt{3}$ cm

20 O apótema de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede $9\sqrt{3}$ cm. Calcule, em seu caderno, a medida do lado do quadrado inscrito nessa circunferência. $18\sqrt{2}$ cm

21 A menor diagonal de um hexágono regular mede $12\sqrt{3}$ cm. Calcule, em seu caderno, o perímetro desse hexágono. 72 cm

22 Considerando a figura ao lado, determine, em seu caderno, o perímetro do quadrado circunscrito à circunferência. 40 cm



23 Divide-se uma circunferência que tem 10 cm de diâmetro em seis partes iguais. Escolhem-se três pontos alternados dessa divisão, os quais são unidos com segmentos de reta. Determine em seu caderno a medida de cada um desses segmentos. $5\sqrt{3}$ cm

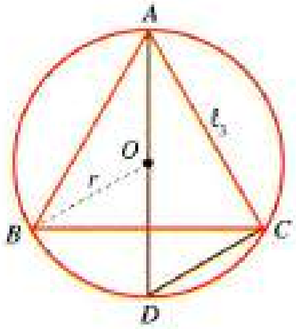
Triângulo equilátero inscrito

Considere uma circunferência de centro *O* e raio de medida *r*.

Para construir um triângulo equilátero *ABC* inscrito nessa circunferência, a dividimos em seis arcos congruentes e, a seguir, unimos alternadamente os pontos de divisão.

Vamos calcular a medida do lado e do apótema desse triângulo em função de *r*.

Cálculo da medida do lado (ℓ_3)



Observe que:

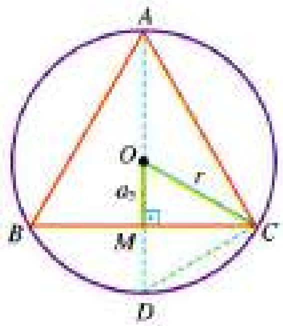
- o $\triangle ADC$ é retângulo (inscrito na semicircunferência)
- $\overline{DC} = \ell_6 = r$

No $\triangle ADC$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(AC)^2 + (DC)^2 = (AD)^2$$
$$(\ell_3)^2 + (\ell_6)^2 = (2r)^2$$
$$\ell_3^2 + r^2 = 4r^2$$
$$\ell_3^2 = 3r^2$$
$$\ell_3 = \sqrt{3r^2} \qquad (r > 0)$$

$$\boxed{\ell_3 = r\sqrt{3}}$$

Cálculo da medida do apótema (a_3)



No $\triangle OMC$, pelo teorema de Pitágoras, temos: $(OM)^2 + (MC)^2 = (OC)^2$

$$a_3^2 + \left(\frac{\ell_3}{2}\right)^2 = r^2$$

$$a_3^2 + \frac{3r^2}{4} = r^2$$

$$a_3^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4}$$

$$a_3^2 = \frac{r^2}{4}$$

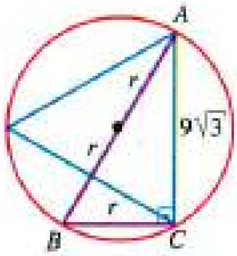
$$a_3 = \sqrt{\frac{r^2}{4}} \qquad (r > 0)$$

$$\boxed{a_3 = \frac{r}{2}}$$

Veja a aplicação desse cálculo no exemplo a seguir.

O lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência mede $9\sqrt{3}$ cm. Calcular a medida do raio dessa circunferência.

Desenhamos a figura:



NELSON MATSUDA

No $\triangle ABC$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$

$\left(9\sqrt{3}\right)^2 + r^2 = (2r)^2$

$81 \cdot 3 + r^2 = 4r^2$

$81 \cdot 3 = 3r^2$

$r^2 = 81$

$r = \sqrt{81}$

$r = 9$

Portanto, o raio mede 9 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

24 Determine o que se pede em seu caderno.

Trace uma circunferência de 3 cm de raio e um triângulo equilátero inscrito nela. Calcule:

a) a medida do lado do triângulo; $3\sqrt{3}$ cm

b) a medida do apótema. 1,5 cm

25 Resolva em seu caderno.

Se o apótema de um triângulo equilátero mede $\sqrt{12}$ cm, determine:

a) a medida do lado do triângulo; 12 cm

b) a medida da altura do triângulo. $6\sqrt{3}$ cm

26 Um triângulo equilátero é inscrito em uma circunferência de 8 cm de raio.

Faça o que se pede no caderno.

a) Calcule a medida do apótema. 4 cm

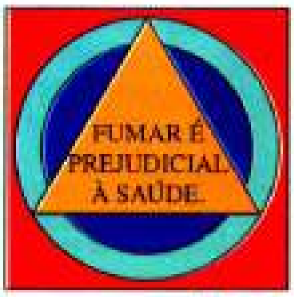
b) Some a medida do raio com a medida do apótema. 12 cm

c) Calcule a medida da altura do triângulo aplicando a fórmula $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$. 12 cm

d) Considerando um triângulo equilátero em que o lado tem medida ℓ, o raio tem medida r e o apótema, medida a, e tendo em vista os resultados dos itens **b** e **c**, podemos dizer que $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = r + a$? sim

27 Um colégio está promovendo uma campanha contra o tabagismo. Para isso, realizou um concurso entre os alunos para a escolha de um cartaz para a campanha. O cartaz abaixo foi o vencedor.

Sabendo que o raio da circunferência que circunscreve o triângulo equilátero mede 30 cm, determine, em seu caderno, a área desse triângulo.



NELSON MATSUDA

lado: $30\sqrt{3}$ cm; área: $675\sqrt{3}$ cm²

28 Em uma mesma circunferência, são inscritos um quadrado e um triângulo equilátero. O apótema do quadrado mede $3{,}5\sqrt{2}$ cm. No caderno, calcule a medida do apótema do triângulo. 3,5 cm

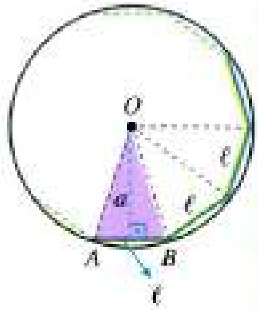
29 Em uma circunferência, é inscrito um triângulo equilátero cujo lado mede $15\sqrt{3}$ cm. Calcule, no caderno, a medida do lado do hexágono regular inscrito nessa circunferência. 15 cm

3. Área de um polígono regular

Considere um polígono regular de n lados.

Indicando por ℓ a medida do lado do polígono e por a a medida de seu apótema, a área do $\triangle AOB$ é dada por:

$$\frac{\ell \cdot a}{2}$$



Como o polígono tem n lados, terá também n triângulos com a mesma área do $\triangle AOB$.

A área A do polígono será, portanto:

$$A = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2}, \text{ou seja, } A = \frac{n \cdot \ell \cdot a}{2}$$

O perímetro do polígono é $n \cdot \ell$. Indicando o perímetro por $2p$, temos:

$$A = \frac{\cancel{2}p \cdot a}{\cancel{2}} \qquad \boxed{A = p \cdot a}$$

A medida p é chamada de **semiperímetro**.

Acompanhe o exemplo a seguir.

Calcular a área de um decágono regular com 12 cm de lado. Vamos usar tg 18° = 0,32.

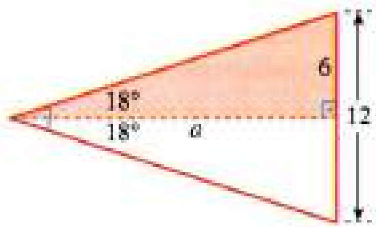
- Cálculo do semiperímetro, em centímetro:

$$p = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60, \text{ ou seja, } p = 60 \text{ cm}$$

- Cálculo do ângulo central:

$$a_c = \frac{360°}{10} = 36°$$

- Cálculo do apótema, em centímetro:



$$\text{tg } 18° = \frac{6}{a}$$

$$a \cdot 0{,}32 = 6$$

$$\frac{a \cdot 0{,}32}{0{,}32} = \frac{6}{0{,}32}$$

$$a = 18{,}75 \text{ cm}$$

- Cálculo da área do polígono, em centímetro quadrado:

$$A = p \cdot a$$

$$A = 60 \cdot 18{,}75$$

$$A = 1.125$$

Logo, a área do decágono regular é 1.125 cm².

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

30 O professor de Matemática de uma escola promoveu um campeonato de pipas entre os alunos. Para isso, passou a seguinte especificação: a pipa deverá ter a forma de um hexágono regular com lados medindo 20 cm. Calcule, em seu caderno, a medida do apótema e a área da pipa. $A = 600\sqrt{3}$ cm²; $a = 10\sqrt{3}$ cm

31 O lado de um pentágono regular mede 20 cm. Calcule a sua área. (*Dado*: tg 36° ≃ 0,73). ≃ 684,93 cm²

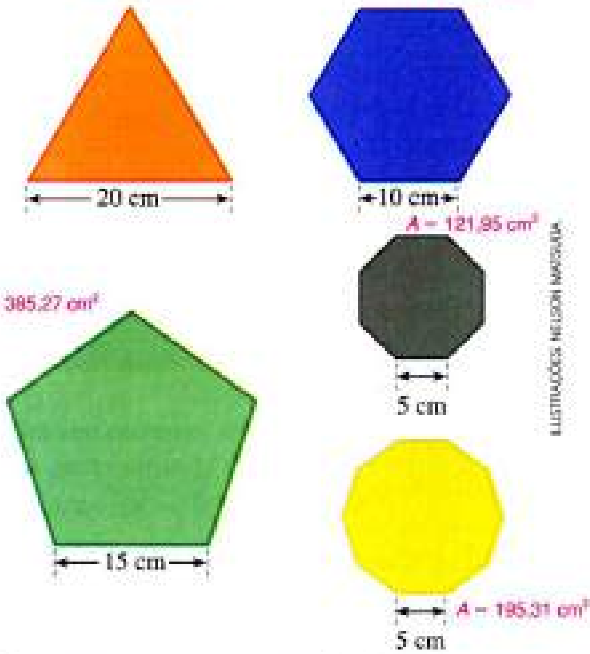
32 Um eneágono regular é inscrito numa circunferência de 18 cm de raio. Calcule sua área sabendo que sen 20° ≃ 0,34 e cos 20° ≃ 0,93. ≃ 922,04 cm²

33 A figura abaixo está desenhada no anúncio publicitário de um bufê infantil.

JOSÉ LUÍS JUHAS

Sabendo que o diâmetro da circunferência da figura mede 3,6 cm, determine, no caderno, a área do triângulo equilátero impresso nesse anúncio. $2{,}43\sqrt{3}$ cm²

34 Veja as figuras e faça o que se pede no caderno.

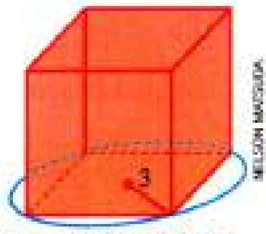


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

a) Represente em um gráfico de colunas as áreas dos polígonos.
(Considere: $\sqrt{3}$ = 1,73; tg 30° = 0,58; tg 36° = 0,73; tg 22,5° = 0,41; tg 18° = 0,32) construção de gráfico

b) Calcule a média das áreas desses polígonos (área média). 226,82 cm²

35 Determine a área da base e a área da superfície lateral de um cubo que tem uma das faces inscrita numa circunferência de 3 cm de raio.



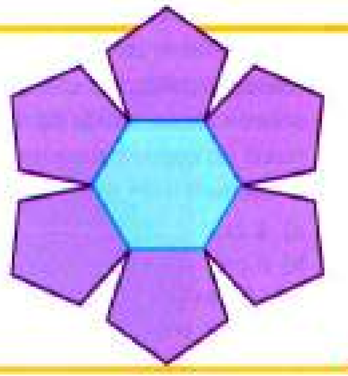
NELSON MATSUDA

área da base: 18 cm²; área da superfície lateral: 72 cm²

Pense mais um pouco...

Ângela é proprietária de uma loja de artesanato. No final do ano, ela pretende oferecer um brinde aos clientes da loja: um enfeite confeccionado em madeira. O enfeite será uma flor estilizada, formada por polígonos regulares: 1 hexágono e 6 pentágonos.

Sabendo que o hexágono tem lado de medida igual a 2,0 cm, determine, em seu caderno, a área aproximada de madeira que Ângela irá utilizar para construir cada enfeite. 51,44 cm²

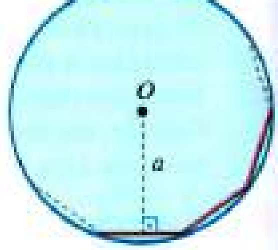


NELSON MATSUDA

4. Área de um círculo

Considere um círculo de centro O e raio de medida r.

Vamos inscrever nesse círculo um polígono regular de n lados, sendo a a medida do apótema do polígono.



NELSON MATSUDA

Supondo que o número de lados (n) cresça indefinidamente, acontecerá o seguinte:

- o perímetro $2p$ do polígono regular vai se aproximar do comprimento $2\pi r$ da circunferência e, portanto, o semiperímetro p se aproximará de πr;
- a medida do apótema do polígono regular vai se aproximar do raio do círculo;
- a área do polígono regular vai se aproximar da área do círculo.

Vamos, então, encontrar uma fórmula que forneça a área de um círculo:

$$A_{\text{polígono}} = \underset{\pi r}{\underset{\downarrow}{p}} \cdot \underset{r}{\underset{\downarrow}{a}}$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi r \cdot r$$

$$\boxed{A_{\text{círculo}} = \pi r^2}$$

Como exemplo, vamos calcular, em metro quadrado, a área de uma praça circular que tem 35 m de raio.

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$$
$$A_{\text{círculo}} \simeq 3{,}14 \cdot (35)^2$$
$$A_{\text{círculo}} \simeq 3{,}14 \cdot 1.225$$
$$A_{\text{círculo}} \simeq 3.846{,}50$$

JOSÉ LUIS JUHAS

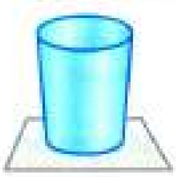
Logo, a praça tem aproximadamente 3.846,50 m² de área.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

36 Responda à questão no caderno.

(Saresp) Juliana colocou um copo molhado sobre a mesa, e nela ficou a marca da base circular do copo. A área da marca é de 16π cm². O diâmetro da base do copo é: alternativa b

a) 4 cm
b) 8 cm
c) 16 cm
d) $\simeq$ 5,7 cm



NELSON MATSUDA

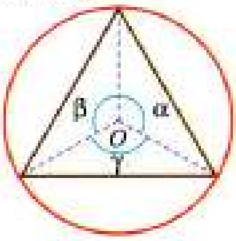
37 Responda à questão do caderno.

(Fuvest-SP) O triângulo ABC é inscrito em uma circunferência de raio 5 cm. Sabe-se que A e B são extremidades de um diâmetro e que a corda $\overline{BC}$ mede 6 cm. Então a área do triângulo ABC, em cm², vale: alternativa a

a) 24
b) 12
c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
d) $6\sqrt{2}$
e) $2\sqrt{3}$

38 Responda à questão no caderno.

(Unifor-CE) Um triângulo está inscrito em uma circunferência de centro *O*, como mostra a figura abaixo:



NELSON MATSUDA

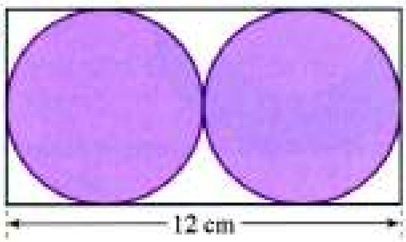
Se o raio da circunferência mede 1 cm e os ângulos α, β e γ são congruentes, então o lado do triângulo mede: alternativa e

a) 1,2 cm **c)** $\sqrt{2}$ cm **e)** $\sqrt{3}$ cm
b) 1,3 cm **d)** 1,5 cm

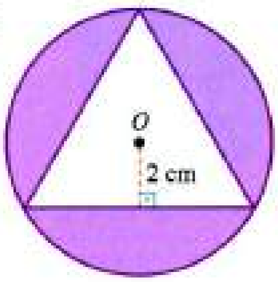
39 Junte algumas moedas de diferentes valores. Depois, calcule a área aproximada de cada uma delas. Em seguida, construa uma tabela com as áreas das moedas de todos os valores. construção de tabela

40 No caderno, calcule a área da parte pintada de lilás. (*Dado:* $\sqrt{3} = 1,73$)

a) 56,52 cm²



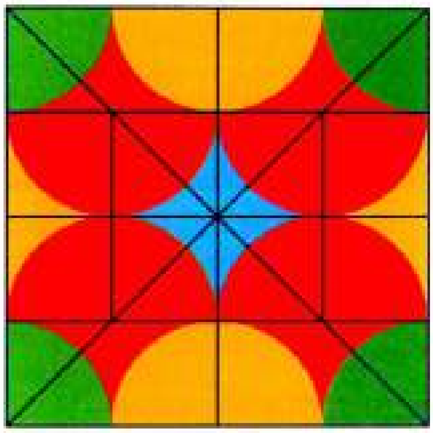
b) 29,48 cm²



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

41 Sueli, uma professora de Matemática, pediu aos alunos do 9º ano que se organizassem em grupos e criassem um quebra-cabeça com figuras geométricas. Depois, os alunos deveriam formular uma questão a respeito do quebra-cabeça. O grupo de Ricardo elaborou o quebra-cabeça a seguir e formulou esta questão: "Determine a área da parte pintada de azul, sabendo que o quebra-cabeça foi construído a partir de um quadrado de lado igual a 20 cm".

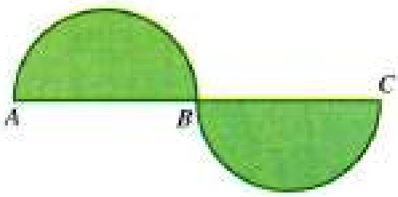
Resolva, em seu caderno, a questão elaborada pelo grupo de Ricardo. 21,50 cm²



NELSON MATSUDA

42 Em seu caderno, encontre a área aproximada da parte pintada de verde.

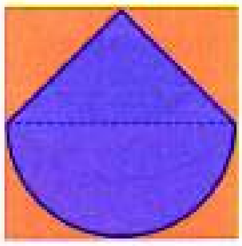
a) $AB = BC = 2,4$ cm 4,52 cm²



b) $AB = 4$ cm 6,28 cm²

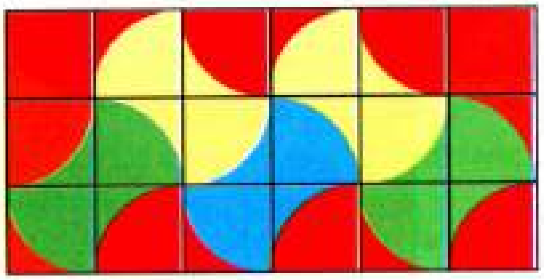
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

43 Uma fábrica de bijuterias criou um pingente, que é recortado de um quadrado de acrílico cujo lado mede 2,5 cm, conforme a figura abaixo. Determine, em seu caderno, a área aproximada do pingente. 4 cm²



NELSON MATSUDA

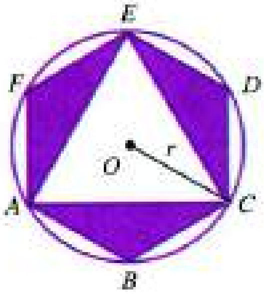
44 Durante uma aula de Arte, Pedro elaborou um painel, conforme a figura abaixo.



NELSON MATSUDA

Esse painel foi feito em um papel quadriculado cujo quadradinho tem 3 cm de lado. Em seu caderno, determine a área da parte pintada de verde. 36 cm²

45 Na figura, temos que r é a medida do raio da circunferência e $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{CD} \cong \overset{\frown}{DE} \cong \overset{\frown}{EF} \cong \overset{\frown}{FA}$.



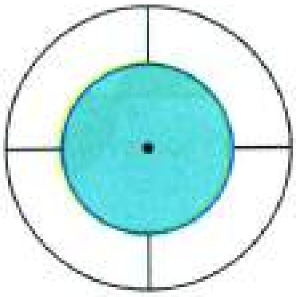
NELSON MATSUDA

Em seu caderno, calcule a área da região pintada de roxo. $\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$

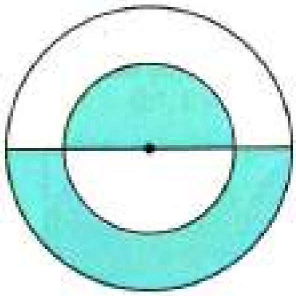
Pense mais um pouco...

Todas as figuras abaixo são formadas por duas circunferências concêntricas de raios iguais a 2 cm e 3 cm, mas apenas duas delas podem ser sobrepostas. Descubra que figuras são essas e determine a área da região verde. figuras congruentes: c, d; área: $\frac{9\pi}{2}$ cm²

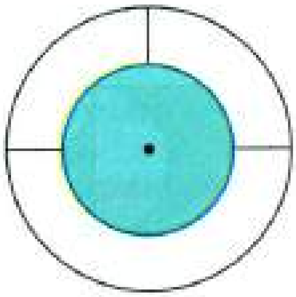
a)



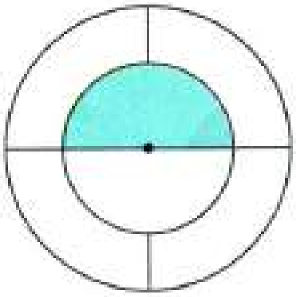
d)



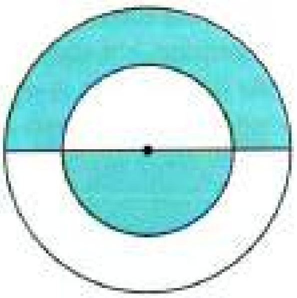
b)



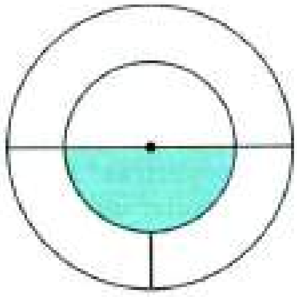
e)



c)



f)

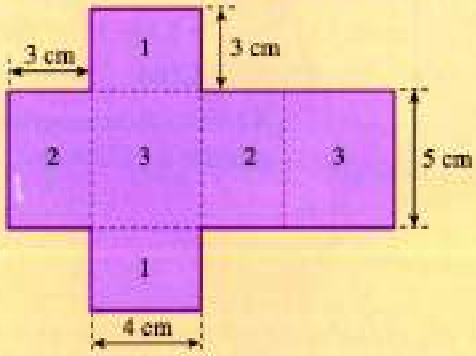


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Calculando áreas e fazendo experiências com volumes

Você se lembra de como se faz a planificação de um paralelepípedo? E a de um cubo? Analisando as planificações, podemos determinar a área total da superfície desses sólidos. Veja:

Planificação de um paralelepípedo



Cálculo da área em centímetro quadrado:

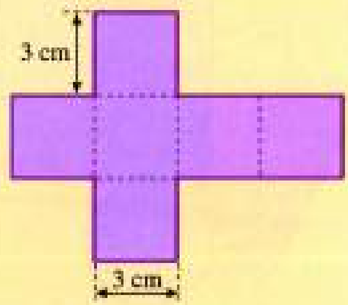
$$A = \overbrace{2\cdot 3\cdot 4}^{\boxed{\text{Área do retângulo 1}}} + \overbrace{2\cdot 3\cdot 5}^{\boxed{\text{Área do retângulo 2}}} + \overbrace{2\cdot 4\cdot 5}^{\boxed{\text{Área do retângulo 3}}}$$

$A = 24 + 30 + 40$

$A = 94$

A área total da superfície do paralelepípedo é 94 cm².

Planificação de um cubo



Cálculo da área em centímetro quadrado:

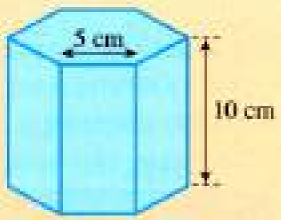
$$A = 6\cdot \overbrace{3\cdot 3}^{\boxed{\text{Área do quadrado}}}$$

$A = 54$

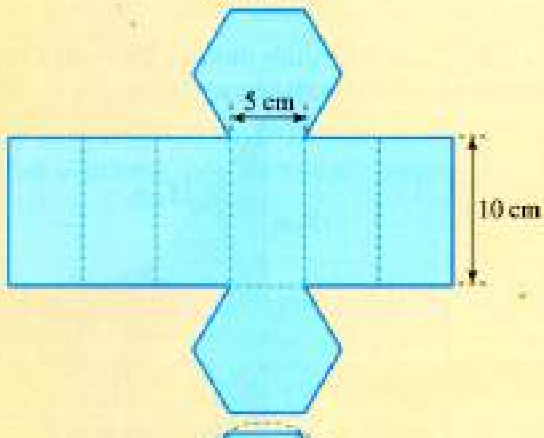
A área total da superfície do cubo é 54 cm².

Do mesmo modo, podemos determinar a área total da superfície de um prisma através de sua planificação.

Prisma



Planificação



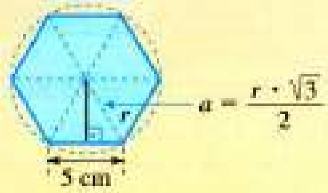
Cálculo da área em centímetro quadrado:

$$A = 6\cdot \overbrace{10\cdot 5}^{\boxed{\text{Área do retângulo}}} + 2\cdot A_{\text{hexágono}}$$

$$A = 300 + 2\cdot 6\cdot A_{\text{triângulo}}$$

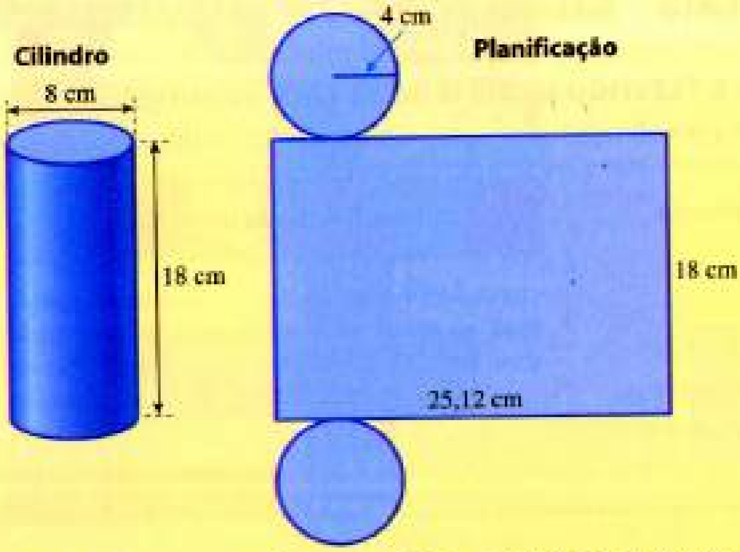
$$A = 300 + 2\cdot 6\cdot \frac{5\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$A = 300 + 75\sqrt{3}$$



A área total da superfície do prisma é $\left(300 + 75\sqrt{3}\right)$ cm².

Vamos recorrer à planificação de um cilindro para determinar a área total de sua superfície.



Cálculo da área em centímetro quadrado:

$$A = \underbrace{2 \cdot \pi \cdot 4^2}_{\text{Área do círculo}} + \underbrace{18 \cdot 25{,}12}_{\text{Área do retângulo}}$$

$$A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 16 + 452{,}16$$

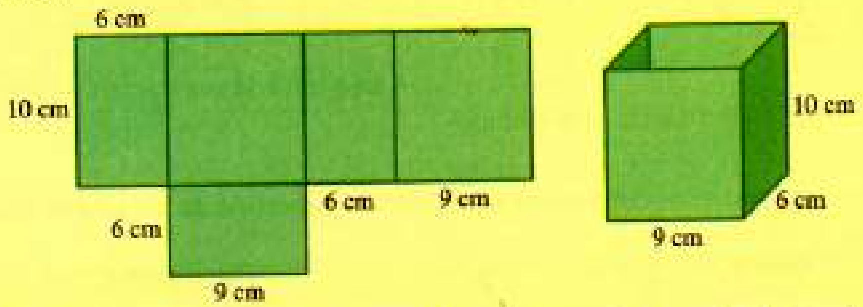
$$A = 552{,}64$$

A área total da superfície do cilindro é 552,64 cm^2.

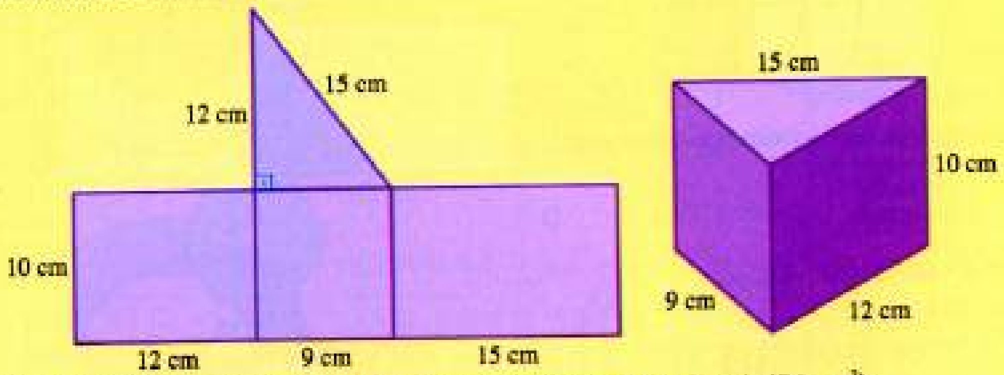
Agora, veja como podemos constatar o volume de alguns sólidos experimentalmente.

Experiência 1

Construímos um modelo de prisma de base retangular a partir de sua planificação, conforme figuras. Observe que eliminamos uma das faces, pois nesse modelo de prisma despejaremos areia até a borda.



Construímos, também, um modelo de prisma de base triangular a partir de sua planificação, tendo eliminado uma das faces.



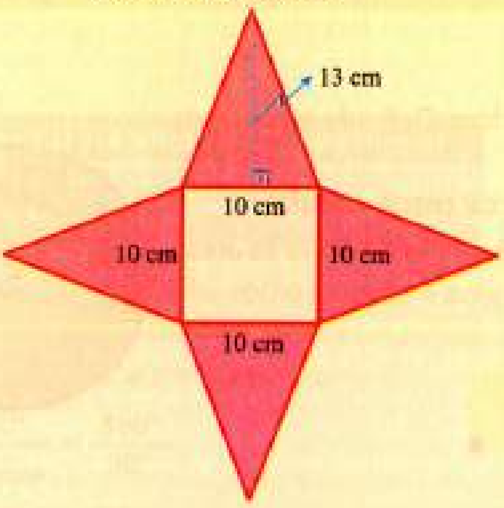
Os dois prismas têm mesma altura (10 cm) e bases com áreas iguais (54 cm^2).

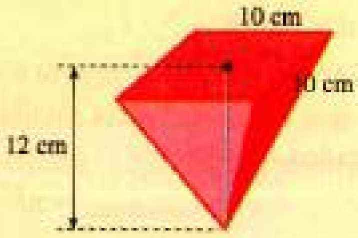
Ao despejar a areia do prisma de base retangular no prisma de base triangular, verificamos que os dois têm mesmo volume. Como já sabemos calcular o volume do primeiro prisma ($V = 9 \cdot 6 \cdot 10$), concluímos que o segundo prisma também tem volume igual a 540 cm^3.

Experiência 2

Construímos um modelo de pirâmide de base quadrada e um modelo de prisma de base quadrada a partir de suas planificações, conforme figuras. Observe que eliminamos uma das faces para poder enchê-los com areia.

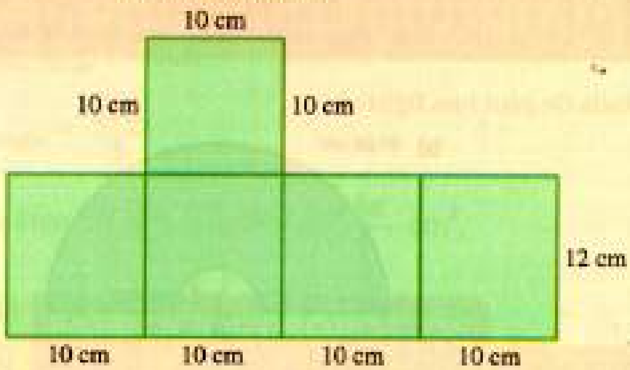
Modelo de pirâmide

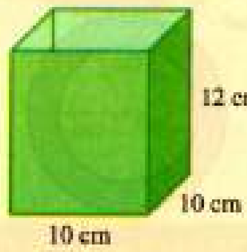




ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

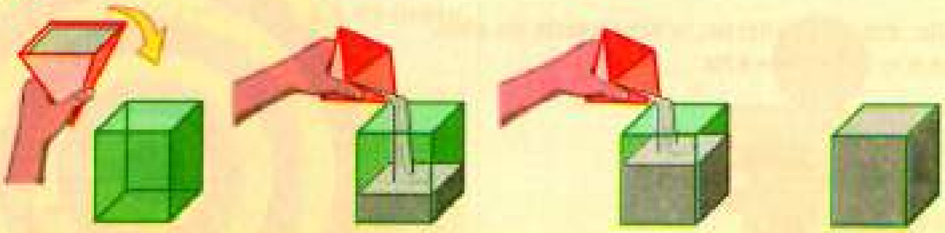
Modelo de prisma





ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Observe que o prisma e a pirâmide têm mesma área de base e também mesma altura. Enchendo a pirâmide de areia e despejando seu conteúdo no prisma, é possível repetir o procedimento três vezes, ou seja, para encher o prisma, precisamos do conteúdo de três pirâmides.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

O volume da pirâmide corresponde, portanto, a um terço do volume do prisma, ou seja:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12$$

Portanto, o volume da pirâmide é igual a 400 cm^3.

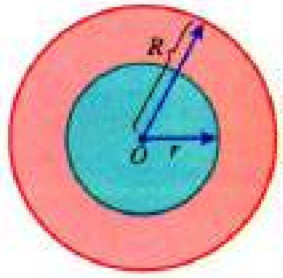
Se achar conveniente, peça aos alunos que verifiquem a relação entre os volumes de um cone e de um cilindro (tomando o cuidado de comparar sólidos de mesma altura e áreas de bases iguais).

Agora é com você!

Reproduza em cartolina as planificações de uma das experiências anteriores, recorte-as (respeitando as medidas indicadas e tomando o cuidado de deixar abas para colagem onde for necessário) e monte os sólidos. Depois, usando areia ou material similar, comprove as relações entre os volumes.

Área de uma coroa circular

Na figura ao lado, temos dois círculos concêntricos. O círculo menor tem raio r e o maior, raio R.



NELSON MATSUDA

A parte da figura pintada de rosa é chamada de **coroa circular**.

Observe que a área da coroa circular é igual à diferença entre as áreas dos dois círculos, ou seja:

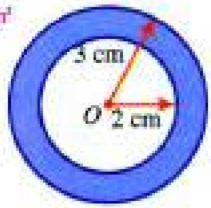
$$A_{\text{coroa circular}} = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$\boxed{A_{\text{coroa circular}} = \pi(R^2 - r^2)}$$

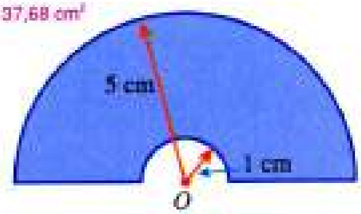
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

46 Calcule, em seu caderno, a área pintada de azul nas figuras.

a) 15,70 cm²



b) 37,68 cm²



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

47 Dois círculos concêntricos de raios 6 cm e 2 cm formam uma coroa circular. Calcule, em seu caderno, a área dessa coroa. 32π cm²

Pense mais um pouco...

Calcule, em seu caderno, a área verde do alvo. (Adote $\pi = 3{,}14$.) A = 8.792

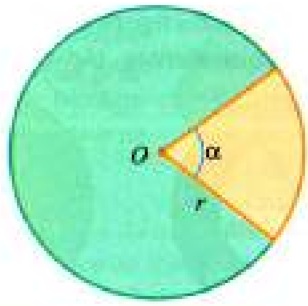

JOSÉ LUÍS JUHAS

NELSON MATSUDA

Área de um setor circular

Todo ângulo central determina em um círculo uma região chamada de **setor circular**.

Considerando o setor circular em que a medida do ângulo central, em grau, é α, podemos calcular a área desse setor estabelecendo uma proporção:



Área	Medida do ângulo central
πr^2	360°
$A_{\text{setor circular}}$	α

$$\frac{\pi r^2}{A_{\text{setor circular}}} = \frac{360°}{\alpha}$$

Vejamos, por exemplo, como calcular a área do setor circular cujo ângulo central mede 30° e cujo raio mede 10 cm.

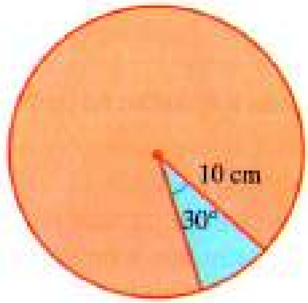
Temos: $\alpha = 30°$ e $r = 10$ cm

$$\frac{\pi \cdot 10^2}{A_{\text{setor circular}}} = \frac{360°}{30°}$$

$$\frac{100\pi}{A_{\text{setor circular}}} = \frac{12}{1}$$

$$12 \cdot A_{\text{setor circular}} = 100\pi$$

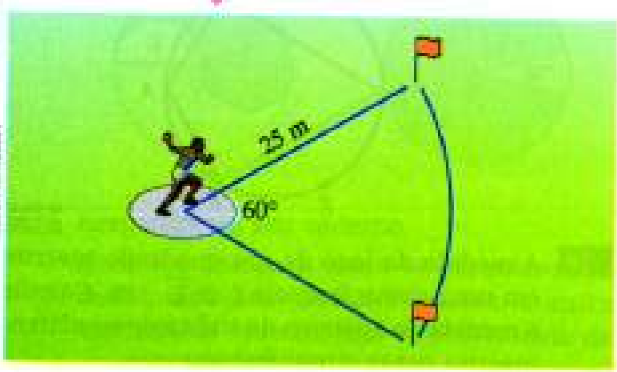
$$A_{\text{setor circular}} = \frac{25\pi}{3}$$



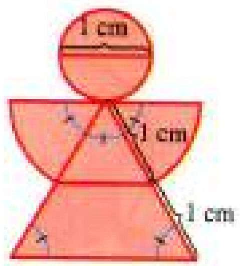
Logo, a área do setor circular é $\frac{25\pi}{3}$ cm².

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

48 Em uma pista de atletismo, o campo de arremesso de peso tem a forma de um setor circular com 60° de abertura e 25 m de raio. Calcule, em seu caderno, a área desse campo. $\frac{625\pi}{6}$ m² ≈ 327 m²



49 Para fazer um molde, Clarice desenhou a figura abaixo. Calcule, no caderno, a área aproximada da figura desenhada por Clarice.



3,55 cm²

50 Em uma circunferência de 15 cm de raio, o arco de um setor circular mede 10π cm. Determine no caderno:

a) a medida do ângulo central desse setor; 120°

b) a área desse setor. 75π cm²

51 Represente em um gráfico de setores a área pintada de cada figura e verifique se existem figuras equivalentes. (Adote $\pi = 3{,}14$.) As figuras 2 e 4 são equivalentes.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Figura 1

Figura 2

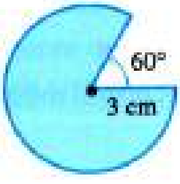


Figura 3

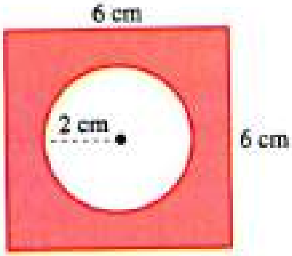


Figura 4

52 Responda à questão no caderno.

(PUC-RJ) Triplicando-se o raio de uma circunferência: alternativa c

a) a área é multiplicada por 9π.

b) o comprimento é multiplicado por 3π.

c) a área é multiplicada por 9 e o comprimento por 3.

d) a área e o comprimento são ambos multiplicados por 3.

e) a área é multiplicada por 3 e o comprimento por 9.

53 Responda à questão no caderno.

(Fuvest-SP) Um comício político lotou uma praça semicircular de 130 m de raio. Admitindo uma ocupação média de quatro pessoas por m^2, qual a melhor estimativa do número de pessoas presentes? alternativa b

a) dez mil

b) cem mil

c) meio milhão

d) um milhão

e) muito mais de um milhão

54 Responda à questão no caderno.

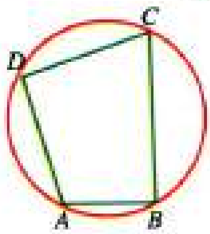
(Vunesp) Um cavalo se encontra preso em um cercado de pastagem cuja forma é um quadrado, com lado medindo 50 m. Ele está amarrado a uma corda de 40 m que está fixada em um dos cantos do quadrado. Considerando $\pi = 3{,}14$, calcule a área, em metro quadrado, da região do cercado que o cavalo não conseguirá alcançar, porque está amarrado. alternativa a

a) 1.244 **b)** 1.256 **c)** 1.422 **d)** 1.424 **e)** 1.444

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

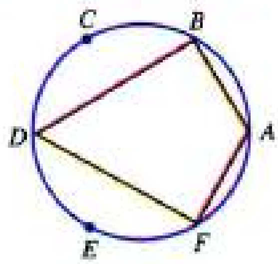
55 Na figura, $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ são lados de um quadrado, $\overline{AB}$ é lado de um hexágono regular e $\overline{BC}$ é lado de um triângulo equilátero. Sabe-se que $BC = 4\sqrt{3}$. Calcule, no caderno, AB e AD. $AB = 4$ e $AD = 4\sqrt{2}$

NELSON MATSUDA



56 O perímetro de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede 42 m. Calcule, no caderno, o perímetro do quadrado inscrito nessa circunferência. $28\sqrt{2}$ m

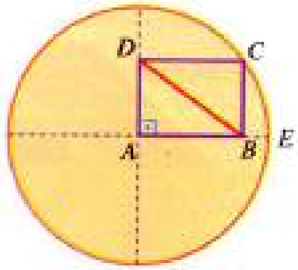
57 Uma circunferência tem $7\sqrt{2}$ cm de raio e está dividida em seis arcos congruentes. Calcule, em seu caderno, o perímetro do polígono $ABDF$. $14\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm



NELSON MATSUDA

58 A medida do lado de um quadrado inscrito em uma circunferência é $8\sqrt{2}$ cm. Calcule a medida do apótema do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência. 4 cm

59 Na figura abaixo, *ABCD* é um retângulo inscrito em um quadrante de um círculo. No caderno, calcule a medida de $\overline{BD}$, sendo $CD = 8$ cm e $BE = 2$ cm. 10 cm



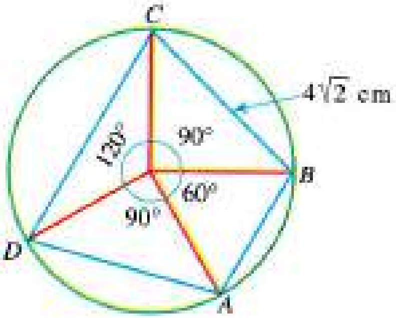
NELSON MATSUDA

60 Considerando a figura abaixo, calcule em seu caderno:

a) a medida do raio da circunferência; 4 cm

b) a medida de $\overline{AB}$; 4 cm

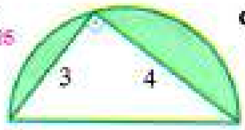
c) a medida de $\overline{CD}$. $4\sqrt{3}$ cm



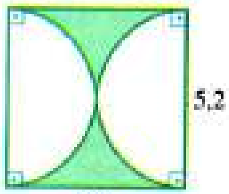
NELSON MATSUDA

61 Em seu caderno, determine a área das figuras pintadas de verde. Em *b* e *d*, O é o centro da circunferência. Use $\pi = 3{,}14$.

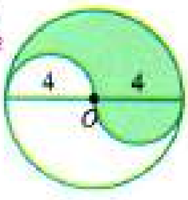
a) 3,8125



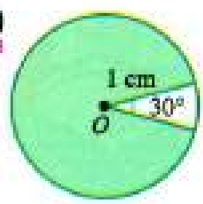
c) 5,8136



b) 25,12



d) 2,88

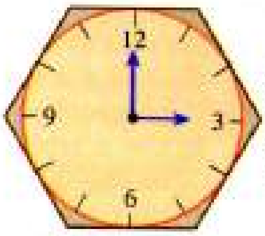


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

62 Responda em seu caderno.

Qual é a diferença entre os perímetros de dois quadrados, um circunscrito e outro inscrito em uma mesma circunferência de $\sqrt{2}$ cm de raio? $8(\sqrt{2}-1)$ cm

63 Raul deu de presente à mãe dele um relógio de parede com formato de hexágono regular, como na figura ao lado.

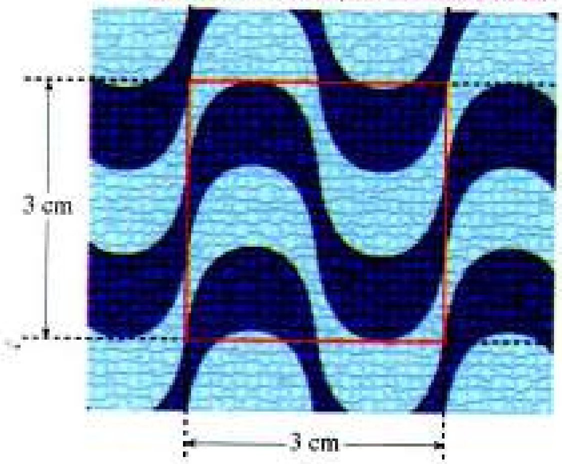


NELSON MATSUDA

Determine a área do mostrador circular desse relógio, sabendo que o hexágono regular circunscrito tem 12 cm de lado. 108π cm²

64 Ao quadricular uma ilustração do calçadão de Copacabana, Lucas notou que a área ocupada pelas pedras azul-escuras era maior que a ocupada pelas pedras azul-claras.

a) A área estimada da parte azul-escura é 6 cm².

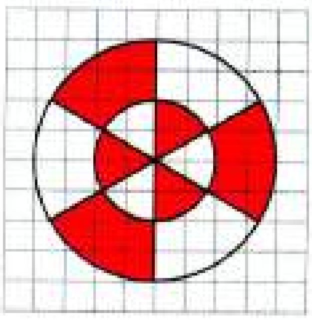


NELSON MATSUDA

a) Faça a estimativa da área, em cm², ocupada pelas pedras azul-escuras do quadrado em destaque na figura acima.

b) Considerando que a área estimada da parte azul-escura no quadrado seja igual à área de um círculo, faça um desenho, no caderno, de como ficaria um novo revestimento para a calçada de Copacabana com círculos azul-escuros. Indique as medidas em seu desenho. resposta pessoal
O círculo terá raio igual a 1,38 cm.

65 Calcule a área aproximada da parte da figura pintada de vermelho, sabendo que o lado do quadradinho do quadriculado mede 0,5 cm. 6,28 cm²



NELSON MATSUDA

66 Um polígono regular tem 12 lados e é inscrito em uma circunferência de 10 cm de raio.

a) Qual é a medida do ângulo central do polígono? $30°$

b) Use a tabela de razões trigonométricas da página 154, com duas casas decimais, para determinar a medida do apótema e a do lado desse polígono. lado: 5,20 cm; apótema = 9,70 cm

c) Estabeleça a diferença entre a medida da circunferência e o perímetro desse polígono. 0,4 cm

d) Qual é a área desse polígono? 302,64 cm²

67 Resolva no caderno:

(Unifor-CE) Uma indústria utiliza as placas retangulares de alumínio mostradas na figura, nas quais toda a região sombreada, que está fora dos círculos, é desperdiçada.

NELSON MATSUDA

Qual é a área desperdiçada, em centímetro quadrado? (*Observação*: em seus cálculos, considere $\pi = 3,1$.) 18 cm²

68 Uma folha de papel tem 18 cm por 12 cm.

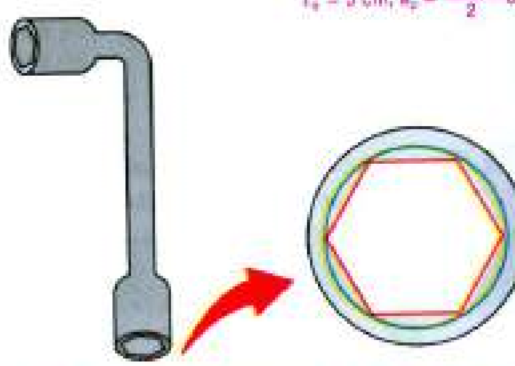
a) Qual é o maior número de círculos tangentes entre si com 3 cm de raio que é possível desenhar nessa folha? 6

b) Se esses círculos forem recortados, qual é a quantidade de aparas de papel, em centímetro quadrado, que restará? (Adote $\pi = 3,14$.) 46,44 cm²

69 A situação ilustrada abaixo sugere um quadrado circunscrito a uma circunferência. Sabendo que o lado do quadrado mede 3,6 cm, calcule, em seu caderno, quanto mede o raio dessa circunferência. 1,8 cm

NELSON MATSUDA

70 A ferramenta representada na figura é uma chave L número 10. Sabendo que a circunferência destacada em verde tem, na realidade, 5 cm de raio, calcule, no caderno, a medida do lado e do apótema do hexágono destacado com laranja. Explique por que essa ferramenta tem esse nome. $\ell_6 = 5$ cm; $a_6 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm



NELSON MATSUDA

A chave L número 10 tem esse nome porque tem o formato da letra L, e o número 10 corresponde à medida aproximada da diagonal do hexágono em milímetros.

DIVERSIFICANDO

Jogo do desenhe ou responda

Número de participantes: 2 jogadores

Material:

- 20 cartas com figuras geométricas (polígono e seus elementos; circunferência e seus elementos – ângulo, mediatriz, bissetriz etc.), com ênfase em figuras estudadas nos capítulos 8 e 9 deste livro. As figuras devem estar identificadas corretamente.
- Um saquinho não transparente para guardar as cartas confeccionadas.
- Papel e lápis para esboçar a figura e marcar os pontos.

Regras:

- Após sorteio, o primeiro a jogar retira uma carta do saquinho, sem mostrá-la.
- O jogador que tira a carta deve dizer ao outro uma característica da figura, para que ele tente adivinhá-la desenhando ou respondendo oralmente. Para cada carta, podem ser dadas até 3 dicas, uma a cada tentativa. Por exemplo, se a carta tiver um quadrado ele pode dar as seguintes dicas: "é um quadrilátero", "tem ângulos opostos congruentes" e "é equilátero".
- Se um jogador der uma dica errada, perde 2 pontos.
- Pontuação: ao acertar o nome ou o desenho na 1ª tentativa, o jogador ganha 3 pontos; na 2ª tentativa, ganha 2 pontos; e na 3ª, ganha 1 ponto.
- Após o acerto ou erro na 3ª tentativa, passa-se a vez.
- Vence aquele que completar primeiro 15 pontos. Caso nenhum dos jogadores consiga atingir os 15 pontos, vence aquele que conseguir a maior pontuação.

■ **Responda às questões em seu caderno.**

1. Observe o diálogo de Rafael e Karina. De acordo com as regras, o que deverá acontecer com a pontuação de Rafael? Rafael deu uma dica errada e, segundo as regras, ele deve perder 2 pontos.

2. Se um jogador tirasse uma carta com um hexágono regular, que dica ele poderia dar sobre essa figura?
respostas possíveis: "Você pode encontrar um formato parecido na colmeia de abelhas", ou "A soma da medida dos ângulos internos é 720°", ou "Minha figura tem seis lados de mesma medida".

Respostas

CAPÍTULO 1

Exercícios complementares

30. 2^{21}

31. 2^{40}

32. alternativa a

33. alternativa d

34. **a)** $\frac{9}{16}$

b) $\frac{16}{25}$

c) $\frac{16}{9}$

35. **a)** $\frac{4}{25}$

b) $\frac{8.000}{27}$

36. **a)** $3 \cdot 10^6$

b) $3 \cdot 10$

37. $1{,}99 \cdot 10^{-23}$ g

38. alternativa b

39. alternativa d

99. -14

100. 5 m

102. $10\sqrt{113}$ m $\simeq$ 106 m

103. **a)** 2

b) $\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{3}$

d) $\sqrt[3]{2^3}$

104. **a)** $3\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{10}$

c) $6\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{30}$

e) $5\sqrt{10}$

f) $16\sqrt{2}$

105. $18\sqrt{18}$ cm^3 ou $54\sqrt{2}$ cm^3

106. **a)** $(12 + 12\sqrt{2})$ cm

b) $(6\sqrt{2} + 8)$ cm^2

c) $(4\sqrt{2} + 6)$ cm^3

107. 37 passos

108. **a)** $4\sqrt{2}$

b) $5(\sqrt{3} + 1)$

c) $\sqrt{5} + 3$

109. A expressão dada coincide com o valor de π até a 5ª casa decimal.

110. alternativa b

Pense mais um pouco...

Página 21

a) $1{,}89216 \cdot 10^{13}$ km

b) 500 s

Página 25

a) 2

b) 27

Página 35

a) 27 cubos

b) $12.096\sqrt{7}$ cm^3

Página 40

$3\sqrt{5}$ cm

Para saber mais

Páginas 34 e 35

1. a) $2^{3^3} = 2^{27}$

b) $2^{3^{2^3}} = 2^{3^8} = 2^{6561}$

c) $((3^2)^3)^2 = 3^{12}$

2. a) $(a + b)$^2

b) $a + b$^2

c) $1/(a + b)$

d) $1/a + b$

e) $(a + b)\ /\ (c + d)$

f) $a/(c + d) + b$

3. a) $(a + b)$^(1/2)

b) $a + b$^(1/2)

c) $1/(a + b)$^(1/2)

d) $1/a$^(1/2) + b

Diversificando

Página 42

O que é maior?

1. a) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{12} = 3^4 = 81$ e $\left(\sqrt[4]{4}\right)^{12} = 4^3 = 64$, como $81 > 64$, será $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$.

b) $\left(\sqrt[4]{4}\right)^4 = 4$ e $\left(\sqrt{2}\right)^4 = 2^2 = 4$, como $4 = 4$, será $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

CAPÍTULO 2

Exercícios complementares

26. a) $\dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{2}{9}$

d) $\dfrac{7}{2}$

27. a) $x = 12$; $y = 21$

b) $x = 12$; $y = 2$

28. 6,6

29. $CP = 4$; $CH = 10$

31. $x = 3{,}75$

32. 14 cm e 12 cm

33. 21 cm, 28 cm e 35 cm

34. $AB' = 2{,}6$ cm, $B'C' = 3{,}9$ cm e $C'D' = 6{,}5$ cm

35. $BD = 3$ cm e $CD = 4$ cm

36. 6

62. a) V

b) F; dois triângulos semelhantes com razão de semelhança diferente de 1 não são congruentes.

c) F; Há triângulos retângulos que não são semelhantes, por exemplo, um triângulo retângulo isósceles e um triângulo retângulo escaleno.

d) V

e) V

63. a) $\dfrac{3}{2}$;

b) $\dfrac{3}{2}$;

c) $\dfrac{3}{2}$;

d) $\dfrac{9}{4}$

64. 26

65. b) 6 m

66. alternativa b

67. Ela estará a 10 km de distância.

68. b) $AE = 12$ cm e $EC = 30$ cm

69. 2,5 km

70. 11,25 cm; 15 cm; 18,75 cm

71. 54,6 cm

72. 72 passos = 57,60 m

73. 20 cm

74. alternativa b

75. $BD = 9$ cm; $DF = 12$ cm

76. alternativa b

77. 20,5 m

78. $C_1C_2 = 8$ cm

79. $x = 8,8$ cm; $y = 15$ cm

80. 225 cm

81. alternativa b

Pense mais um pouco...

Página 53

2. **b)** No item **a**, foi construído um feixe de retas paralelas, cortado por dois segmentos transversais ($\overline{AP_5}$ e $\overline{AB}$). Como o feixe divide $\overline{AP_5}$ em partes de medidas iguais, pelo teorema de Tales, o feixe também divide $\overline{AB}$ em partes iguais.

Página 57

Devemos digitar 120%, 100% do original mais 20% de ampliação.

Página 60

14,4 cm

Página 63

$12 + 8\sqrt{2}$

Página 71

O perímetro é 80 cm e sua área é 400 cm².

Para saber mais

Páginas 45, 46 e 47

Não são retângulos áureos.

Diversificando

Página 77

1. Não é possível calcular, pois as medidas da câmara não são dadas.
2. A distância do quadro até o orifício deve ser de 50 cm.

CAPÍTULO 3

Exercícios complementares

37. **b)** em 4 dias

38. **b)** média: 43,5 min;
moda: 20 min;
mediana: 30 min
c) 7,5%

39. alternativa c

40. **a)** 21,36 anos
b) idade modal: 14 anos;
idade mediana: 21 anos
d) 39%

41. alternativa a

42. alternativa d

43. alternativa a

44. alternativa c

45. alternativa d

46. alternativa d

47. alternativa e

48. alternativa b

49. alternativa e

50. $\simeq 17\%$

51. alternativa d

52. É mais provável que o aluno sorteado não prefira musical, pois a probabilidade é de aproximadamente, 57%.

53. alternativa d

Pense mais um pouco...

Página 92

a) Equipe **A**: 420 e equipe **B**: 420 pontos.

b) 6

c) Equipe **A**: 70 e equipe **B**: 70

d) As duas obtiveram médias iguais.

e) Não, pois, no caso da equipe **B**, a média 70 não deixa claro que Rute, Leia, Rosa e, principalmente, Bete deveriam treinar mais.

CAPÍTULO 4

Exercícios complementares

31. $k \neq -5$

32. $p = -53$

33. a) $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{3}{2}$

b) $y_1 = y_2 = \frac{5}{2}$

c) $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{7}}$ e $x_2 = \sqrt{\frac{2}{7}}$

d) Não tem raiz real.

34. $x = 8$ cm

35. a) $m = 1$

b) $m = 5$

36. $x = 1$ ou $x = 0$

37. a) $3x^2 = 4.800$

b) -40; 40

c) 40

38. $4\sqrt{3}$

80. a) $k = \frac{43}{9}$

b) $k = 12$

c) $k < \frac{64}{5}$

d) $k = 12$

81. alternativa c

82. alternativa e

83. alternativa b

84. alternativa d

85. alternativa a

86. alternativa c

87. 12 unidades

88. alternativa a

89. alternativa a

90. alternativa d

91. 2 e 3

92. 12

120. a) 4

b) -4 ou 3

c) -5 ou 0

d) -4 ou 4

121. a) -2, 0 e 2

b) $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$

c) -3 e 3

d) $-\sqrt{6}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$

122. a) 16

b) 5

c) 5

d) 1

123. 2

124. 4 e 5

125. 20 crianças

126. 12 h

127. alternativa a

128. alternativa a

129. 100 km/h

130. alternativa d

131. alternativa d

132. -3 ou 3

133. 9

134. 1 ou 2

135. alternativa a

136. alternativa e

Pense mais um pouco...

Página 108

$x = 4$; soma = 30

Página 112

6 m e 5 m

Página 118

Como $m = 2{,}5 > 2$, temos que nesse caso a equação não admite raízes reais. Como $m = 1{,}8 < 2$, temos que nesse caso a equação tem duas raízes reais e diferentes.

Página 129

4 notas

CAPÍTULO 5

Exercícios complementares

24. alternativa c

25. **a)** $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$
b) 3

26. alternativa c

27. 200 m

28. 40 cm

29. **a)** $x = 2\sqrt{74}$
b) $x = 30$

30. $y = \sqrt{69}$

31. **a)** 8 cm
b) 7,5 cm
c) 25 cm
d) 34,5 cm²

32. 6 cm

33. $6\sqrt{3}$ m

34. $\left(5\sqrt{3} + 2\right)4{,}5$

35. 108 cm²

36. Sim, coloca-se o lápis no sentido da diagonal.

37. **a)** 100 m; 128 m; 96 m
b) 6.144 m² e 2.400 m²
c) 3.744 m²

38. $4\sqrt{14}$ cm

39. $3\sqrt{5}$ cm

40. 6 cm

41. **a)** $25u$
b) $234u^2$

42. $20{,}25u^2$

43. **a)** $a = 8\sqrt{2}$
b) $a = 6\sqrt{3}$
c) $a = 10$
d) $a = 7$

44. **a)** 250 m
b) 3 km/h

45. $\left(4 + \sqrt{3}\right)$ cm²

55. alternativa c

56. 15 cm e 20 cm

57. $\sqrt{5}$ cm

58. 46 km

59. alternativa c

60. alternativa b

61. alternativa d

62. alternativa d

63. alternativa b

64. alternativa e

Pense mais um pouco...

Página 137

triângulo grande: 34,1 cm;
triângulo médio: 24,1 cm;

triângulo pequeno: 17,05 cm;
quadrado: 20 cm;
paralelogramo: 24,1 cm

Página 140

1. $3\sqrt{3}$ cm

Página 141

$2x\sqrt{5}$ cm

Para saber mais

Página 138

a) 20 cm e 25 cm; 8 cm e 17 cm; 36 cm e 39 cm; 112 cm e 113 cm
b) 84 cm e 294 cm^2
c) 27 cm; 36 cm; 45 cm

CAPÍTULO 6

Exercícios complementares

38. sen 55° = 0,8;
cos 55° = 0,5;
tg 55° = 1,4

39. a) 15
b) 7,8
c) 30°

40. alternativa b

41. 25,3 cm

42. 26,31 cm

43. 1,40 m

44. 83 m^2

45. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

46. a) $\frac{40}{3}\sqrt{3}$ m
b) 23 m

47. 102,2 m

48. alternativa e

49. $400\sqrt{3}$ cm^2

50. entre 4 e 6

51. alternativa c

52. a) 60 m
b) 34,6 m

53. $10(75\sqrt{3} - 62)$m

54. $48\sqrt{3}$ cm^2

55. 2,66 km

56. 120 m

57. alternativa b

58. alternativa a

Pense mais um pouco...

Página 155

1. a) 40°
b) 53°
c) 62°

2. $m(A\hat{B}C) = 40°$;
$m(B\hat{M}C) = 121°$;
$m(B\hat{C}M) = 19°$

Página 158

a) 108°; 54°
b) 8,1 cm; 16,2 cm; 16,2 cm

Para saber mais

Páginas 161 e 162

1. 4,75 m
2. 21,5 m

CAPÍTULO 7

Exercícios complementares

32. $y = x^2 + x + 6$

33. $\frac{3}{5}$

34. 100

35. a) $y = 3{,}80 + 0{,}70x$
b) $y = 4{,}30 + 0{,}60x$
c) R$ 10,80
d) o táxi da cidade de Júlia
e) 5 km

36. a) -2
b) 1
c) 2
d) -1
e) sim

37. a) $\frac{4}{7}$
c) $\frac{6}{7}$
d) $x > \frac{4}{7}$

38. a) positivo
b) positivo

39. a) $y = 0$, para $x = 0$; $y > 0$, para $x < 0$; $y < 0$, para $x > 0$
b) $y = 0$, para $x = -5$; $y > 0$, para $x > -5$; $y < 0$, para $x < -5$

40. a) $x > 3$
b) $x < 2$
c) $x = \frac{12}{5}$
d) $x > \frac{12}{5}$

41. a) $x = 3$
b) $x < -\frac{5}{6}$

69. alternativa b
70. alternativa a
71. alternativa b
72. alternativa c

73. a) 1
c) $x = 0$ ou $x = 2$
d) para $x \neq 1$

74. a) $c = 10$
b) $y = t^2 - 7t + 10$
c) 3,5 minutos

75. 340 m/s
76. alternativa d
77. 25
78. alternativa b
79. alternativa b
80. alternativa b
81. 200 m^3
82. alternativa a
83. 500
84. $m = \frac{1}{4}$

Pense mais um pouco...

Página 169

a) $y = x \cdot 450$
b) 495 km

Página 174

d) Não. Porque a quantidade de revista é uma grandeza discreta, ela é representada pelos números naturais e não pelos reais.

Página 178

a) $-\frac{1}{3}$
b) 3
c) 1
d) 1

Para saber mais

Páginas 179 e 180

1. j = R$ 2.880,00
2. 12 meses (ou 1 ano)
3. R$ 10.323,86

Diversificando

Página 196

Cercando

b) 20; 200 m^2
d) máximo

Matemática no aperto de mão

13

CAPÍTULO 8

Exercícios complementares

38. 62,8 m

39. **a)** 678,24 m

b) 542,592 m

40. 103,8 km/h

41. 14,13 m/s

42. alternativa e

43. 40.000 km

44. $\sqrt{55}$ cm

45. alternativa b

46. 96

47. $C = 11\pi$

48. $\sqrt{11}$

49. 8,5

50. 24 cm

51. alternativa c

Pense mais um pouco...

Página 200

26,4 cm

Página 205

1. $20\sqrt{2}$ cm

2. 800 cm²

CAPÍTULO 9

Exercícios complementares

55. $AB = 4$ e $AD = 4\sqrt{2}$

56. $28\sqrt{2}$ m

57. $14\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$cm

58. 4 cm

59. 10 cm

60. **a)** 4 cm

b) 4 cm

c) $4\sqrt{3}$ cm

61. **a)** 3,8125

b) 25,12

c) 5,8136

d) 2,88

62. $8\left(\sqrt{2} - 1\right)$cm

63. 108π cm²

64. **a)** A área estimada da parte azul-escura é 6 cm².

b) resposta pessoal. O círculo terá raio igual a 1,38 cm.

65. 6,28 cm²

66. **a)** 30°

b) lado: 5,20 cm; apótema = 9,70 cm

c) 0,4 cm

d) 302,64 cm²

67. 18 cm²

68. **a)** 6 **b)** 46,44 cm²

69. 1,8 cm

70. $\ell_6 = 5$ cm; $a_p = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

A chave L número 10 tem esse nome porque tem o formato da letra L, e o número 10 corresponde à medida aproximada da diagonal do hexágono em milímetros.

Pense mais um pouco...

Página 225

51,44 cm²

Página 228

figuras congruentes: c, d; área: $\dfrac{9\pi}{2}$ cm²

Página 232

A = 8,792

Diversificando

Página 237

1. Rafael deu uma dica errada e, segundo as regras, ele deve perder 2 pontos.

2. respostas possíveis: "Você pode encontrar um formato parecido na colmeia de abelhas", ou "A soma da medida dos ângulos internos é 720°", ou "Minha figura tem seis lados de mesma medida".

BIBLIOGRAFIA

AABOE, Asger. *Episódios da história antiga da Matemática*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

BORIN, Júlia. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática*. São Paulo, CAEM-USP, 1995.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1996.

CASTRUCCI, Benedito. *Fundamentos da geometria*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1978.

COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. *As ideias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo, Atual, 1994.

DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo, Ática, 1998.

DAVIS, Philip J. e HERSH, Reuben. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1989.

DOMINGUES, Hygino H. *Fundamentos de aritmética*. São Paulo, Atual, 1991.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, Editora da Unicamp, 1995.

FRANCISCO, Walter de. *Estatística básica*. Piracicaba, Unimep, 1995.

GILLINGS, Richard J. *Mathematics in the time of the pharaohs*. New York, Dover Publications, Inc., 1972.

IBGE. *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro, IBGE, 2004.

______. *Censo demográfico 2000: resultados preliminares*. Rio de Janeiro, IBGE, 2000.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1997. Tomo 1.

KRULIK, S. e REYS, R. E. *A resolução de problemas na Matemática escolar*. Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo, Atual, 1994.

LINDQUIST, M. M. e SHULTE, A. P. *Aprendendo e ensinando geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo, Atual, 1994.

LINS, Rômulo C. e GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas, Papirus, 1997.

MIGUEL, Antonio e MIORIM, Maria Ângela. *O ensino da Matemática no primeiro grau*. São Paulo, Atual, 1986.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO/SECRETARIA DO ENSINO FUNDAMENTAL. *Parâmetros curriculares nacionais — Matemática* (terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental). Brasília, MEC/Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

PÊNE, N. e DEPRESLE, P. *Décimale*. Paris, Éditions Belin, 1996. Math 6.

ROSA NETO, Ernesto. *Didática da Matemática*. São Paulo, Ática, 1996.

SOUZA, E. R. e DINIZ, M. I. S. V. *Álgebra: das variáveis às equações e funções*. São Paulo, CAEM-USP, 1996.

SOUZA, E. R. e outros. *A Matemática das sete peças do tangram*. São Paulo, CAEM-USP, 1997.

STRUIK, Dirk J. *História concisa das Matemáticas*. Lisboa, Gradiva, 1989.

TOLEDO, Marília e TOLEDO, Mauro. *Didática de Matemática*. São Paulo, FTD, 1997.

WALDEGG, G.; VILLASEÑOR, R. e GARCÍA, V. *Matemáticas en contexto: aprendiendo matemáticas a través de la resolución de problemas*. Ciudad de México, Grupo editorial Iberoamérica, 1999. Tercer curso.

BIBLIOGRAFIA

SUGESTÕES DE LEITURA PARA O ALUNO

GUELLI, Oscar. *Dando corda na trigonometria*. São Paulo, Ática, 2000. (Coleção Contando a História da Matemática)

______. *Equação: o idioma da Álgebra*. São Paulo, Ática, 1999. (Coleção Contando a História da Matemática)

______. *História da equação do 2º grau*. São Paulo, Ática, 1999. (Coleção Contando a História da Matemática)

______. *História de potências e raízes*. São Paulo, Ática, 2000. (Coleção Contando a História da Matemática)

IMENES, Luiz Márcio. *Geometria das dobraduras*. São Paulo, Scipione, 2005. (Coleção Vivendo a Matemática)

IMENES, Luiz Márcio; JAKUBOVIC, José e LELLIS, Marcelo. *Equação do 2º grau*. São Paulo, Atual, 2004. (Coleção Pra que serve Matemática?)

______. *Estatística*. São Paulo, Atual, 2002. (Coleção Pra que serve Matemática?)

______. *Semelhança*. São Paulo, Atual, 2002. (Coleção Pra que serve Matemática?)

IMENES, Luiz Márcio e LELLIS, Marcelo. *Descobrindo o teorema de Pitágoras*. São Paulo, Atual, 2008. (Coleção Vivendo a Matemática)

______. *Geometria dos mosaicos*. São Paulo, Scipione, 2007. (Coleção Vivendo a Matemática)

MACHADO, Nílson José. *Lógica? É lógico!* São Paulo, Scipione, 2000. (Coleção Vivendo a Matemática)

______. *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*. São Paulo, Scipione, 2000. (Coleção Vivendo a Matemática)

______. *Semelhança não é mera coincidência*. São Paulo, Scipione, 2006. (Coleção Vivendo a Matemática)

ROSA Neto, Ernesto. *As mil e uma equações*. São Paulo, Ática, 2008. (Coleção A Descoberta da Matemática)

______. *Em busca das coordenadas*. São Paulo, Ática, 2008. (Coleção A Descoberta da Matemática)

______. *Saída pelo triângulo*. São Paulo, Ática, 2008. (Coleção A Descoberta da Matemática)

SMOOTHEY, Marion. *Atividades e jogos com estatística*. Trad. Sérgio Quadros. São Paulo, Scipione, 1998. (Coleção Investigação Matemática)

______. *Atividades e jogos com gráficos*. Trad. Sérgio Quadros. São Paulo, Scipione, 1997. (Coleção Investigação Matemática)

TAHAN, Malba. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro, Record, 2003.